Nierówności

1. Wykaż, że jeżeli $a, b > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.
2. Wykaż, że jeżeli $a, b > 0$, to:
$$\frac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$
3. Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geqslant 9$.
4. Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.
5. Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 3$.
6. Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$.
7. Wykaż, że jeżeli $a, b, c > 0$, to:
a). $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geqslant a + b + c$
b). $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}$
c). $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leqslant \sqrt{3(a+b+c)}$
d). $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} \leqslant \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}$
8. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ spełniających warunek $a_1 a_2 \ldots a_n = 1$ zachodzi nierówność: $(1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n$.
9. Niech $f : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ będzie funkcją rosnącą. Wykaż, że dla dowolnych $a, b \in \mathbf{R}^+$ zachodzi nierówność:
$$\frac{1}{f(a)+a} + \frac{1}{f(b)+b} \geqslant \frac{1}{f(a)+b} + \frac{1}{f(b)+a}.$$
10. Która z liczb jest większa:
a). $\frac{1111113}{2222225}$ czy $\frac{4444443}{8888885}$
b). $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ czy $\sqrt{10}$
11. Wykaż, że jeżeli $a > b > 0$ i $m > n$, to:
$$\frac{a^m - b^m}{a^m + b^m} > \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}.$$
12. Dane są liczby dodatnie a, b, m, n i p, przy czym $a \neq b$ i $m > n$. Wykaż, że:
$$\frac{a^{m+p} + b^{m+p}}{a^m + b^m} > \frac{a^{n+p} + b^{n+p}}{a^n + b^n}.$$
13. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, m i n są dodatnie, to:
$$\frac{a^m + b^m}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} \leqslant \frac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2}.$$
14. Wykaż, że jeżeli liczby a i b są dodatnie, to:
$$\frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^2+b^2}{2} \cdot \frac{a^3+b^3}{2} \leqslant \frac{a^6+b^6}{2}.$$