NIERÓWNOŚĆ SHAPIRO

Tomasz Kochanek
Wykład dla młodzieży licealnej

8 grudnia 2006

1 Kilka klasycznych nierówności

Pomocne w naszych rozważaniach okażą się takie klasyczne nierówności jak: nierówność między średnią arytmetyczną, a geometryczną, nierówność Schwarza, nierówność Jensena dla funkcji wypukłej, nierówność związana z ciągami przeciwnie uporządkowanymi oraz pewna prosta nierówność cykliczna. Podajemy w tym paragrafie dokładne sformułowania wszystkich tych nierówności wraz z dowodami. W przypadku nierówności Cauchy'ego między średnią arytmetyczną, a geometryczną nie podajemy standardowego dowodu, ale pewien znacznie krótszy dowód oparty na innej, prostej nierówności. Różnorodne dowody oraz wiele ćwiczeń i informacji tyczący nie tylko tych wymienionych nierówności znaleźć można w książce L. Kourliandtchika [2]. Przy większości z niżej opisanych twierdzeń znajdują się ćwiczenia na zastosowanie danej nierówności wraz ze wskazówką rozwiązania.

Twierdzenie 1. (Nierówność Cauchy'ego) *Załóżmy, że $a_1, \ldots, a_n$ są liczbami dodatnimi. Wówczas ich średnia arytmetyczna jest większa lub równa ich średniej geometrycznej, tzn.*

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}\,. \tag{1}$$

Dowód. Wykorzystamy następującą nierówność:

$$e^x \geq x + 1 \quad \text{dla wszystkich } x \in \mathbb{R}\,.$$

Ażeby ją uzasadnić można np. rozważyć funkcję określoną wzorem $f(x) = e^x - x - 1$ i zauważyć, że zeruje się ona w punkcie $x = 0$, a jednocześnie, ze względu na znak jej pochodnej: $f'(x) = e^x - 1$, który jest ujemny dla $x < 0$ i dodatni dla $x > 0$, jest ona funkcją malejącą na przedziale $(-\infty, 0)$ oraz funkcją rosnącą na przedziale $(0, +\infty)$. To wszystko oznacza, że funkcja f przyjjmuje swe globalne minimum w punkcie $x = 0$ i minimum to wynosi $f(0) = 0$; w takim razie $f(x) \geq 0$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Można także spojrzeć na poniższy rysunek.

Oznaczmy $A = \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)$. Liczba A jest dodatnia; wykorzystując powyższą nierówność możemy napisać zatem:

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} &= A\sqrt[n]{\left(1 + \frac{a_1 - A}{A}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{a_n - A}{A}\right)} \le A\sqrt[n]{e^{\frac{a_1 - A}{A}} \cdot \ldots \cdot e^{\frac{a_n - A}{A}}} \\ &= Ae^{\frac{1}{n}\left(\left(\frac{a_1}{A} - 1\right) + \ldots + \left(\frac{a_n}{A} - 1\right)\right)} = Ae^0 = A\,,\end{aligned}$$

co właśnie należało wykazać.

■

Ćwiczenie 1. Pokazać, że dla wszystkich liczb $a, b, c > 1$ prawdziwa jest nierówność

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \ge \frac{9}{a+b+c}\,.$$

Wskazówka. Dwukrotnie zastosować nierówność Cauchy'ego; najpierw dla trzech liczb:

$$\frac{\log_b a}{a+b}\,,\ \frac{\log_c b}{b+c}\,,\ \frac{\log_a c}{c+a}\,.$$

Twierdzenie 2. (Nierówność Schwarza) *Załóżmy, że $a_1, \ldots, a_n$ oraz $b_1, \ldots, b_n$ są dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Wówczas zachodzi nierówność*

$$(a_1^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots + b_n^2) \ge (a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)^2\,. \tag{2}$$

Dowód. Dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{i=1}^{n}(a_ix + b_i)^2 \\ &= x^2\sum_{i=1}^{n}a_i^2 + 2x\sum_{i=1}^{n}a_ib_i + \sum_{i=1}^{n}b_i^2\,.\end{aligned}$$

Wyrażenie to przedstawia funkcję kwadratową zmiennej x. Skoro jest ona, jak wyżej napisano, stale nieujemna, więc posiada co najwyżej jeden pierwiastek. To z kolei oznacza, że wyróżnik tego trójmianu jest mniejszy lub równy zeru:

$$\left(2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \le 0\,,$$

co jest równoważne z dowodzoną przez nas nierównością.

■

Ćwiczenie 2. Pokazać, że bezpośrednim wnioskiem z nierówności Schwarza jest nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{y_1} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}\,,$$

gdzie $x_1, \ldots, x_n$ oraz $y_1, \ldots, y_n$ są dowolnymi liczbami dodatnimi. Następnie, korzystając z tego wniosku, wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} \ge 1\,.$$

Wskazówka. Przyjąć $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, y_1 = 2b + c, y_2 = 2c + a, y_3 = 2a + b$.

Żeby sformułować następną nierówność, potrzebujemy pojęcia funkcji wypukłej. Mamy mianowicie następującą definicję.

Definicja 1. Niech funckja $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją określoną na pewnym obustronnie otwartym przedziale (a, b) (może być to przedział nieskończony). Funkcję f nazywamy *wypukłą* wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych dwóch punktów $x, y \in (a, b)$ oraz dla dowolnej liczby $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi nierówność

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)\,.$$

Liczby $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ występujące w powyższej nierówności czasami nazywane są *wagami*, a wyrażenie $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ nazywane jest *kombinacją wypukłą* punktów $x_1, \ldots, x_n$. Geometrycznie definicja ta oznacza tyle, że wykres funkcji f leży zawsze poniżej lub na cięciwie łączącej dwa dowolnie ustalone jego punkty.

Funkcjami wypukłymi są na przykład: $f(x) = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ dla $x \in (0, +\infty)$, $f(x) = \sin x$ dla $x \in (\pi, 2\pi)$.

Twierdzenie 3. (Nierówność Jensena) *Załóżmy, że funkcja $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ jest wypukła na przedziale (a, b) (być może nieskończonym). Wówczas dla dowolnych liczb $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ oraz dowolnych takich liczb $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$, że $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, zachodzi nierówność*

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)\,. \tag{3}$$

Dowód. Udowodnimy to twierdzenie stosując indukcję względem n. Dla $n = 1$ nie ma czego dowodzić (mamy tu tylko jeden punkt $x_1 \in (a, b)$ i jedną liczbę $\lambda_1 = 1$, a nasza nierówność staje się równością). Dla $n = 2$ dowodzona nierówność jest niczym innym jak nierównością definiującą funkcje wypukłe.

Załóżmy teraz indukcyjnie, że $n \in \mathbb{N}$ oraz że nierówność (3) zachodzi dla n oraz dowolnych liczb $x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ takich, że $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. W celu wykazania nierówności dla $n+1$ ustalmy dowolnie $n+1$ liczb $x_1, \ldots, x_{n+1} \in (a, b)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in [0, 1]$ takich, że $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$. Jeśli $\lambda_{n+1} = 1$, to musi być $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ i nasza nierówność dla $n+1$ oczywiście zachodzi. Załóżmy więc, że $\lambda_{n+1} < 1$. Wówczas możemy napisać:

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_{n+1} x_{n+1}) &= f\left((1-\lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1}) f\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&\leq (1-\lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}} f(x_1) + \ldots + \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}} f(x_n)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\
&= \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})\,,
\end{aligned}$$

przy czym pisząc pierwszy znak nierówności skorzystaliśmy z nierówności z Definicji 1 (z wagami $(1-\lambda_{n+1})$ i λ_{n+1} - oczywiście są to liczby z przedziału $[0,1]$, które sumują się do 1), pisząc zaś drugi znak nierówności skorzystaliśmy z poczynionego założenia indukcyjnego czyli - nierówności dla n punktów (tutaj wagami były liczby $\frac{\lambda_1}{1-\lambda_{n+1}}, \ldots, \frac{\lambda_n}{1-\lambda_{n+1}}$ - również są to liczby z przedziału $[0,1]$ oraz sumują się do 1, na mocy założenia, że $\lambda_1 + \ldots + \lambda_{n+1} = 1$).

■

Ćwiczenie 3. Udowodnić następującą nierówność między średnimi ważonymi, stanowiącą uogólnienie nierówności Cauchy'ego: Dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, \ldots, a_n$ oraz $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ takich, że $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$, zachodzi nierówność

$$\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_n a_n \geq a_1^{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot a_n^{\lambda_n} .$$

Zauważyć, że faktycznie wynika stąd nierówność Cauchy'ego, wystarczy bowiem przyjąć $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n}$.

Wskazówka. Zastosować nieówność Jensena dla wypukłej funkcji $f(x) = e^x$.

Następną potrzebną nam nierówność wykażemy posługując się tzw. *metodą uzupełniania do pełnych kwadratów.*

Twierdzenie 4. *Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 . \tag{4}$$

Dowód. Wykorzystamy następujący uogólniony wzór na kwadrat sumy:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j ,$$

gdzie po prawej stronie mamy sumę podwojonych wszystkich możliwych iloczynów wyrażeń postaci $x_i x_j$, gdzie i, j są *różnymi* indeksami ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Wykorzystując ten wzór możemy przepisać dowodzoną nierówność w równoważnej postaci:

$$\left(1 - \frac{1}{n} \right) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j ,$$

czyli

$$(n-1) \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \geq 0 .$$

Zauważmy, że wyrażenie występujące po lewej stronie nierówności możemy pogrupować w następujący sposób: rozważamy dowolny iloczyn postaci $2x_i x_j$, gdzie $1 \leq i < j \leq n$. Mamy oczywiście $x_i^2 + x_j^2 - 2x_i x_j = (x_i - x_j)^2 \geq 0$. Każdy kwadrat x_i^2 wystąpi dokładnie w $(n-1)$ iloczynach postaci $2x_i x_j$ (odpowiadających tym $j \in \{1, \ldots, n\}$, które są różne od i). Jednak dokładnie tyle wynosi współczynnik stojący w powyższej nierówności przy x_i^2. To pokazuje, że wyrażenie po jej lewej stronie może zostać przedstawione jako suma kwadratów postaci $(x_i - x_j)^2$, a zatem - jest to liczba nieujemna, co właśnie należało wykazać.

■

Ćwiczenie 4. Pokaząć, że udowodnione twierdzenie w przypadku $n = 5$ daje nierówność

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \geq \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)^2 \tag{5}$$

dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, x_3, x_4, x_5.

Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca\,. \tag{6}$$

Wskazówka. Aby udowodnić nierówność (6), nie trzeba powoływać się na Twierdzenie 4. Można to zrobić bezpośrednio, mnożąc obie strony tej nierówności przez 2 i uzupełniając do pełnych kwadratów.

Następna nierówność, związana z ciągami przeciwnie uporządkowanymi, może zostać podana w nieco szerszej formie, co zainteresowany Czytelnik może sprawdzić w książce [2], rozdział 4. Obecnie podamy jednak tyle, ile okaże się wystarczające dla zastosowań w problemie Shapiro. Niezbyt precycyjnie mówiąc, jeśli dane są dwa ciągi o tej samej długości złożone z liczb rzeczywistych, powiedzmy: $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ i interesują nas wyrażenia postaci takiej jak $\sum a_i b_i$, to okazuje się, że największą jego wartość możemy uzyskać wówczas, gdy ciągi są jednakowo uporządkowane (np. oba rosnące), zaś najmniejszą jego wartość - gdy są one uporządkowane przeciwnie (np. jeden jest rosnący, a drugi malejący).

Twierdzenie 5. *Niech $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi takimi, że $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ oraz $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ i niech $(b'_1, \ldots, b'_n)$ będzie dowolną permutacją liczb $(b_1, \ldots, b_n)$. Wówczas zachodzi nierówność:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i b'_i\,. \tag{7}$$

Dowód. Zastosujemy indukcję względem n. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Dla $n = 2$ mamy tylko dwie możliwe permutacje: (b_1, b_2) i (b_2, b_1). W przypadku pierwszej z nich nasza nierówność staje się równością, w przypadku drugiej - jest ona równoważna z nierównością $a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq a_1 b_2 + a_2 b_1$. Mamy jednak

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 - a_1 b_2 - a_2 b_1 = (a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \leq 0\,,$$

bowiem $a_1 - a_2 \leq 0$, $b_1 - b_2 \geq 0$.

Załóżmy prawdziwość nierówności (7) dla liczby naturalnej n (i dowolnych ciągów $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ spełniających stosowne założenia). Wykażemy nierówność dla $n + 1$. Ustalmy dowolne ciągi $(a_1, \ldots, a_{n+1})$, $(b_1, \ldots, b_{n+1})$ liczb rzeczywistych takie, pierwszy rosnący, drugi malejący. Ustalmy także dowolnie permutację $(b'_1, \ldots, b'_{n+1})$ ciągu $(b_1, \ldots, b_{n+1})$. Dla dokładnie jednego $i \in \{1, \ldots, n+1\}$ mamy $b_1 = b'_i$.

Jeśli $i = 1$, tzn. $b_1 = b'_1$, to ciąg $(b'_2, \ldots, b'_{n+1})$ jest permutacją ciągu $(b_2, \ldots, b_{n+1})$, więc z założenia indukcyjnego dostajemy nierówność

$$\sum_{i=2}^{n+1} a_i b_i \leq \sum_{i=2}^{n+1} a_i b'_i\,.$$

Dodając do obu stron tej nierówności składnik $a_1 b_1$ $(= a_1 b'_1)$, otrzymujemy żądaną nierówność.

Rozważmy teraz przypadek kiedy $i > 1$. Mamy $a_1 \leq a_i$ (bo a_1 jest najmniejszą ze wszystkich liczb $a_1, \ldots, a_{n+1}$) oraz $b'_i \geq b'_1$ (bo b'_i jest równe b_1 czyli największej z liczb $b_1, \ldots, b_{n+1}$). Możemy zastosować przeto nierówność (7) udowodnioną w przypadku $n = 2$, dla ciągów (a_1, a_i), (b'_i, b'_1). Daje ona

$$a_1 b'_i + a_i b'_1 \le a_1 b'_1 + a_i b'_i \,.$$

Stąd (przez dodanie do obu stron pewnych ,,brakujących" składników):

$$\begin{aligned} & a_1 b'_i + a_2 b'_2 + \ldots + a_{i-1} b'_{i-1} + a_i b'_1 + a_{i+1} b'_{i+1} + \ldots + a_{n+1} b'_{n+1} \quad \le \\ \le \quad & a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + \ldots + a_{i-1} b'_{i-1} + a_i b'_i + a_{i+1} b'_{i+1} + \ldots + a_{n+1} b'_{n+1} \,. \end{aligned}$$

Zaobserwujmy, że po prawej stronie mamy tu już prawą stronę dowodzonej przez nas nierówności (7) dla $n + 1$. Zauważmy także, że ciąg

$$(b'_2, \ldots, b'_{i-1}, b'_1, b'_{i+1}, \ldots, b'_{n+1}) \tag{8}$$

jest permutacją ciągu $(b_2, b_3, \ldots, b_{n+1})$. Istotnie, jedynym elementem nie występującym w ciągu (8) jest b'_i, który jest równy b_1 czyli jedynemu elementowi, którego brakuje w ciągu $(b_2, b_3, \ldots, b_{n+1})$. Możemy zatem zastosować założoną indukcyjnie nierówność (7) dla n-elementowych ciągów: $(a_2, a_3, \ldots, a_{n+1})$, $(b_2.b_3, \ldots, b_{n+1})$ i permutacji (8). Otrzymamy, że

$$\begin{aligned} & a_2 b_2 + \ldots + a_{i-1} b_{i-1} + a_i b_i + a_{i+1} b_{i+1} + \ldots + a_{n+1} b_{n+1} \quad \le \\ \le \quad & a_2 b'_2 + \ldots + a_{i-1} b'_{i-1} + a_i b'_1 + a_{i+1} b'_{i+1} + \ldots + a_{n+1} b'_{n+1} \,. \end{aligned}$$

W połączeniu z poprzednią nierównością daje to:

$$a_1 b'_i + a_2 b_2 + \ldots + a_{n+1} b_{n+1} \le a_1 b'_1 + a_2 b'_2 + \ldots + a_{n+1} b'_{n+1} \,,$$

co stanowi żądaną nierówność, bowiem $b'_i = b_1$.

■

Definicja 2. Ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ nazywamy *przeciwnie uporządkowanymi*, jeśli zachodzi warunek:

$$(a_i > a_j) \Rightarrow (b_i \le b_j) \;.$$

Mówiąc prościej, ciągi takie są przeciwnie uporządkowane, jeśli liczba największa w pierwszym ciągu (ewentualnie któraś z największych, jeśli jest ich więcej niż jedna) ma taki numer jak liczba najmniejsza w drugim ciągu (lub któraś z najmniejszych); liczba druga pod względem wielkości w pierwszym ciągu (któraś z nich) stoi w tym miejscu, co druga najmniejsza w drugim ciągu (któraś z nich) itd. Na przykład, ciągi: $(2, 1, 3)$, $(-1, 1, -2)$ są przeciwnie uporządkowane, podobnie jak ciągi: $(2, 0, 2)$, $(-1, 3, 0)$. Zaś ciągi: $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 0)$ nie są przeciwnie uporządkowane. Czytelnik łatwo odgadnie jaka jest definicja ciągów *jednakowo uporządkowanych* i zachęcany jest do sięgnięcia po książkę [2].

Podamy teraz pewne wzmocnienie Twierdzenia 5. Mianowicie, zachodzi

Twierdzenie 6. *Załóżmy, że ciągi liczb rzeczywistych $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n)$ są przeciwnie uporządkowane. Niech $(a'_1, \ldots, a'_n)$ będzie dowolną permutacją ciągu $(a_1, \ldots, a_n)$ i niech $(b'_1, \ldots, b'_n)$ będzie dowolną permutacją ciągu $(b_1, \ldots, b_n)$. Wówczas zachodzi nierówność*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sum_{i=1}^{n} a'_i b'_i \,. \tag{9}$$

Dowód. Nietrudno stwierdzić, że skoro ciągi $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ są przeciwnie uporządkowane, istnieje wspólna dla nich obu permutacja σ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ przekształcająca pierwszy ciąg w ciąg rosnący, a drugi - w ciąg malejący, tzn.

$$a_{\sigma(1)} \leq \ldots \leq a_{\sigma(n)}\,,$$

$$b_{\sigma(1)} \geq \ldots \geq b_{\sigma(n)}\,.$$

Oczywiście

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} b_{\sigma(i)}$$

(dodawanie jest przemienne!). Na mocy Twierdzenia 5, zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} b_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{\sigma(i)} b_{\tau(\sigma(i))}\,,$$

dla dowolnej permutacji τ zbioru wskaźników $\{1, \ldots, n\}$. Można oczywiście zdefiniować tę permutację tak, aby $b_{\tau(\sigma(i))} = b'_{\mu(i)}$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$, gdzie μ jest tą permutacją, że $a_{\sigma(i)} = a'_{\mu(i)}$ dla $i = 1, \ldots, n$. To kończy dowód, bowiem

$$\sum_{i=1}^{n} a'_{\mu(i)} b'_{\mu(i)} = \sum_{i=1}^{n} a'_i b'_i\,,$$

znów na mocy przemienności dodawania.

■

Ćwiczenie 5. Udowodnić, że dla każdych liczb dodatnich a, b, c zachodzi nierówność

$$a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab\,.$$

Wskazówka. Patrząc na prawą stronę nierówności zaproponować odpowiednie ciągi przeciwnie uporządkowane. Wykorzystać Twierdzenie 6.
Ciekawostka. Zadanie to było jedną z propozycji zadań na finał XXIV Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej w 1983 roku. Podczas dokonywania wyboru zadań członkowie jury mieli przydzielony czas do rozwiązania proponowanych problemów tak, by jak najlepiej móc ocenić trudność danego zadania. Żaden z ówczesnych członków jury nie był w stanie udowodnić tej nierówności.

Literatura

[1] P. H. Dianada, *Extensions of an Inequality of H. S. Shapiro*, American Mathematical Monthly, 66 (1959), 489-491.

[2] L. Kourliandtchik, *Wędrówki po krainie nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2000.

[3] L. Kourliandtchik, *Słynne nierówności*, Wydawnictwo Aksjomat, Toruń 2002.

[4] H. S. Shapiro, *Problem 4603*, American Mathematical Monthly, 61 (1954), 571.