Równania diofantyczne

1. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że $p^2 - 2q^2 = 1$.
2. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p, q i r takie, że $p + q + r = pq + 1$.
3. Cy istnieją różne liczby pierwsze p, q i r takie, że liczba $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$ jest całkowita?
4. Czy istnieje liczba naturalna n taka, że ułamek $\frac{13n+8}{5n+3}$ jest skracalny?
5. Dla jakich całkowitych n liczba $\frac{n^3-n^2+2}{n-1}$ jest liczbą całkowitą?
6. Niech $a, b, c, d \in \mathbb{N}$. Wykaż, że jeżeli $ad - bc = 1$ albo $ad - bc = -1$, to ułamek $\frac{an+b}{cn+d}$ jest nieskracalny dla żadnego $n \in \mathbb{N}$.
7. Rozwiąż podane równania w liczbach naturalnych.
   a). $xy = x + y$
   b). $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
   c). $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$
   d). $xyz = x + y + z$
   e). $\frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx} + \frac{1}{xyz} = 1$
8. Rozwiąż równania:
   a). $[\frac{x+1}{3}] = \frac{x-1}{2}$
   b). $[\frac{x}{4}] = \frac{x+1}{3}$
9. Rozwiąż podane równania w liczbach całkowitych.
   a). $2^x + 2^y = 2^z$
   b). $n^{x_1} + n^{x_2} + \ldots + n^{x_n} = n^y$, $n \in \mathbb{N}, n > 1$
10. Niech $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Wykaż, że jeżeli $a > n$, to równanie

$$a^{x_1} + a^{x_2} + \ldots + a^{x_n} = a^y$$

    nie ma rozwiązania w liczbach całkowitych $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$.
11. a).Czy istnieje liczba trzycyfrowa $\overline{ABC}$ taka, że $\sqrt[3]{\overline{ABC}} = A + B + C$?
    b).Czy istnieje liczba czterocyfrowa $\overline{ABCD}$ taka, że $\sqrt[4]{\overline{ABCD}} = A + B + C + D$?
    (Symbol typu $\overline{ABCD}$ oznacza zapis dziesiętny liczny naturalnej o cyfrach A, B, C, D.)
12. Wyznacz wszystkie liczby pierwsze p i q takie, że liczba $4pq + 1$ jest kwadratem liczby naturalnej.
13. Liczby a^5 i a^7 są całkowite. Wykaż, że liczba a jest również całkowita.
14. Rozwiąż w liczbach całkowitych układ równań:

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1 \\ y^2 = zx + 2 \\ z^2 = xy + 4 \end{cases}$$

15. Dane są takie liczby naturalne a i b, że liczba $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ jest całkowita. Udowodnij, że $NWD(a, b) \leqslant \sqrt{a + b}$.
16. Niech n będzie liczbą złożoną, zaś $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_k$ wszystkimi jej naturalnymi dzielnikami. Udowodnij, że:

$$\frac{d_1}{\sqrt{n}} + \frac{d_2}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{d_k}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{d_1} + \frac{\sqrt{n}}{d_2} + \ldots + \frac{\sqrt{n}}{d_k}.$$

17. Niech m i n będą liczbami naturalnymi. Udowodnij, że liczba $25m + 3n$ jest podzielna przez 83 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $3m + 7n$ jest podzielna przez 83.

18. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a i b liczba $NWD(a+b, ab) - NWD(a,b)$ jest parzysta.

19. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ liczba $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ nie jest całkowita.

20. Rozwiąż w liczbach naturalnych następujące układy równań:
a). $\begin{cases} x + y = 180 \\ NWD(x,y) = 30 \end{cases}$
b). $\begin{cases} xy = 720 \\ NWD(x,y) = 4 \end{cases}$

21. Rozwiąż w liczbach całkowitych następujące równania:
a). $13x + 29y = 31$
b). $7x - 11y = 41$
c). $10x + 119y + 161z = 83$
d). $18x + 20y + 15z = 1$
e). $2x^3 + xy - 7 = 0$

22. Fabryka wysyła towar w paczkach po 3 kg i po 5 kg. Wykaż, że można w ten sposób wysłać każdą całkowitą ilość kilogramów większą niż 7.

23. Smok ma 2000 głów. Rycerz może ściąć jednym cięciem 33 głowy lub 21 głów, lub 17 głów, lub 1 głowę. Smokowi odrasta natychmiast odpowiednio 48 głów lub 0 głów, lub 14 głów, lub 349 głów. Smok zostanie zabity, gdy wszystkie głowy będą ścięte. Czy istnieje taka strategia walki rycerza ze smokiem, aby smok zginął?

24. Wyznacz wszystkie liczby c, dla których podane równania mają co najmniej jedno rozwiązanie w liczbach naturalnych x, y i z.
a). $2x + 3y = c$
b). $3x + 5y = c$
c). $2x + 3y + 5z = c$

25. Rozwiąż w liczbach naturalnych następujące równania:
a). $a^2 + b^2 = c^2$
b). $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$