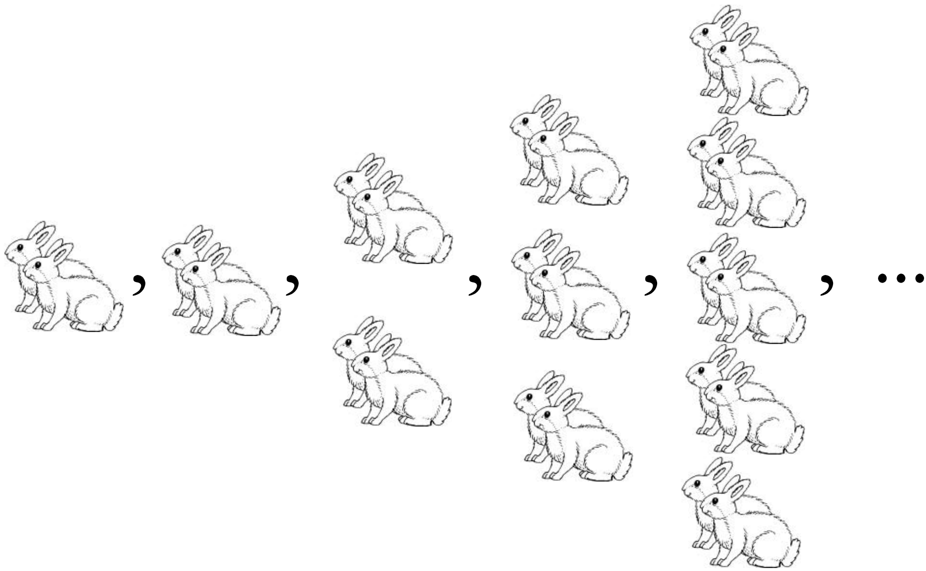
[MACIERZATOR22]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



[Króliki a matematyka]

Wiele ineresujących odkryć matematycznych miało swój początek w problemach życia codziennego. Jednym z nich jest zagadnienie, którym zajmował się włoski matematyk Leonard z Pizy, znany powszechnie jako Fibonacci (1175-1250). Badał on następujący problem dotyczący hodowli królików: mamy parę królików, która po upływie miesiąca – po osiągnięciu dojrzałości – zaczyna się rozmnażać. Co miesiąc para ta wydaje na świat kolejną parę królików, ta zaś po upływie miesiąca również zaczyna się rozmnażać w identyczny sposób. Założenia Fibonacciego były ogromnym uproszczeniem rzeczywistego modelu populacyjnego królika, ale rozważania natury biologicznej pominiemy. Leonardo szukał odpowiedzi na pytanie: Ile par królików dostaniemy za n – miesięcy (pomijając śmiertelność zwierząt)? Rezultatem badań matematyka było następujące równanie rekurencyjne: $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$, z warunkami początkowymi: $F(0) = F(1) = 1$. Rozwiązaniami powyższego równania jest ciąg liczb: $\{1,1,2,3,5,8,13,...\}$ zwany ciągiem Fibonacciego, jego elementy zaś odpowiednio liczbami Fibonacciego.

czyt. dalej str 2

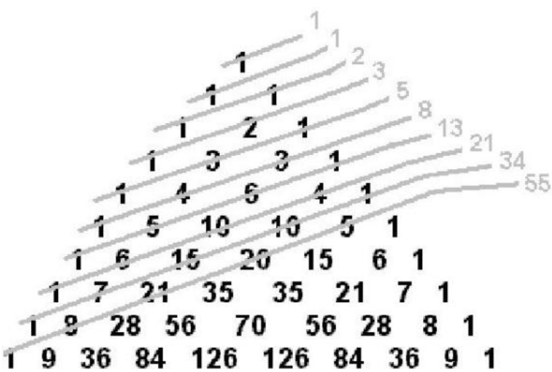
Leonardo wyniki badań zamieścił w swoim słynnym dziele z 1202 roku „Liber abaci" („Księga rachunków"), w którym również jako jeden z pierwszych zaprezentował Europejczykom notacje liczb za pomocą cyfr arabskich.

Co jest tak niezwykłego w odkrytych przez Fibonacciego liczbach? Dlaczego od wieków inspirują one matematyków i przyrodników na całym świecie? Nie sposób odpowiedzieć wyczerpująco na to pytanie w tak krótkim artykule. Można jedynie zarysować problematykę związaną z tym zagadnieniem. Niejednokrotnie liczby Fibonacciego spotykamy w przyrodzie. Okazuje się, iż badając zagadnienia populacyjne, bądź też związane z budową tworów natury i organizmów żywych (jak na przykład muszle niektórych ślimaków), często napotykamy te niezwykłe liczby. Może nam się to przytrafić również w chemii, np. badając strukturę niektórych hydrowodorów. Jaka tajemnica kryje się za sekwencją odkrytą przez Leonarda z Pizy? Wyjaśnienia zagadki poszukamy badając ilorazy kolejnych wyrazów ciągu Fibonacciego:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \ldots$$

Ciąg ten zmierza nieuchronnie do sławnej złotej liczby $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Związana z nią złota proporcja jest bardzo często spotykana w przyrodzie. Była ona natchnieniem dla wielu architektów (m.in. budowniczych Partenonu, lub piramid w Gizie), artystów, takich jak Leonardo da Vinci, czy muzyków (przykładowo spora część sonat Mozarta była podzielona na dwie części według złotej proporcji). Liczby związane ze złotą liczbą muszą więc również mieć w sobie coś z jej niesamowitości.

I rzeczywiście, kolejne stulecia przyniosły wiele zaskakujących faktów dotyczących liczb Fibonacciego. Napotykamy je w wielu dyscyplinach matematycznych, między innymi w geometrii i kombinatoryce. Przykładowo w trójkącie Pascala:



Przez lata sformułowano bardzo wiele twierdzeń o tych liczbach, a badania nad nimi trwają po dzień dzisiejszy. W 1963 roku zostało nawet utworzone The Fibonacci Association – stowarzyszenie badaczy zagadnień związanych z pracami Fibonacciego a w szczególności z badaniem właściwości odkrytego przez niego ciągu. Stowarzyszenie to redaguje magazyn „The Fibonacci Quarterly", w którym publikowane są najnowsze prace z tej dziedziny.

Wiele podobnych historii matematycznych można by opowiedzieć. Pokazują one piękno i złożoność naszego świata, do zrozumienia którego kluczem może być matematyka. Niezwykłe odkrycia matematyczne mogą zaś mieć całkiem niewinny początek, jak choćby hodowla małych, uszatych futrzaków...

Damian Cisowski

[III Święto Pi 2009]

Do trzech razy sztuka! - głosi znane przysłowie. Jego budowa sugeruje jednak, że dwa pierwsze podejścia były nieudane. Dwa pierwsze Święta π cieszyły się olbrzymią popularnością i pokazały, że ani matematyka, ani fizyka, ani chemia, ani informatyka nie są przedmiotami nudnymi czy odtwórczymi. Czy trzecie obchody były równie owocne?

Zacznijmy od tego, czym owo Święto π jest. Solenizantki przedstawiać raczej nikomu nie trzeba, a jej święto obchodzimy właśnie 14 marca, gdyż w zapisie amerykańskim ta data to 3.14 – czyli, jak łatwo zauważyć, trzy pierwsze cyfry rozwinięcia dziesiętnego π. W 2007 roku dziekan Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii, prof. dr hab. Maciej Sablik, postanowił przenieść chwalebną tradycję świętowania dnia tej stałej na grunt polski. Po sukcesie pierwszego i drugiego Święta, logiczną konsekwencją było zorganizowanie tegoż po raz kolejny.

Jak łatwo policzyć, w tym roku Uniwersytet Śląski organizował już trzecie obchody Święta π. Odbywały się one w dniach od 12 do 14 marca na terenie Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii. Przybyli uczniowie mogli wysłuchać licznych wykładów, uczestniczyć w warsztatach i pokazach i wchłonąć w przyjemny sposób niespotykane ilości wiedzy. Oczywiście, nie musieli być wyłącznie stroną bierną – mogli startować w wielu konkursach, zdobywając atrakcyjne nagrody, a również i warsztaty pozwalały im bezpośrednio uczestniczyć w wydarzeniach, które rozgrywały się przed ich oczami.

12 marca o godzinie 9:42(czyli trzy razy π) oficjalnie rozpoczęto III Święto π. Wykład inauguracyjny wygłosili prof. Krystian Roleder oraz dr hab. Alfred Czogała, wprowadzając gości w atmosferę matematyki, fizyki, chemii i informatyki. Na wykładzie można się było dowiedzieć, że 14 marca jest nie tylko Świętem π, ale również dniem urodzin Alberta Einsteina oraz Wacława Sierpińskiego – o ile tego pierwszego nie trzeba przedstawiać, ten drugi jest znany nieco węższemu gronu osób. Jego najsłynniejszym odkryciem jest Trójkąt Sierpińskiego, czyli nasz, polski twór na polu fraktali, o których również wiele można się było na wykładzie inauguracyjnym dowiedzieć. Na dodatek jego urodziny nie tylko korelują z rozwinięciem dziesiętnym π, ale również z dowodem jej przestępności – dowód ten został przedstawiony w 1882 roku, a właśnie wtedy się ów polski matematyk urodził. Oprócz tego można było usłyszeć o doświadczeniach narciarskich prof. Roledera oraz o tym, jak najnowsza technologia na nie wpłynęła – o dziwo, wykorzystując to, co odkrył tak już dawno temu Einstein, a mianowicie efekt fotoelektryczny. Tym sposobem wykładowcy udowodnili wszystkim wątpiącym, że Albert Einstein wielkim naukowcem był, a jego odkrycia są wykorzystywane – i to na różne sposoby - do dziś.

Setki gości, głównie gimnazjalistów i licealistów, zaraz po wykładzie przystąpiło do szturmu na wszystkie atrakcje, jakie przygotowały poszczególne Instytuty. A mieli na co! Już od godziny 9:00 trwały Warsztaty Koła Naukowego Matematyków – po sukcesach Kawiarenki Szkockiej, Zagadek Logicznych, Fraktali, Geometrii Czterowymiarowej oraz Kasyna warsztaty te powróciły w glorii również w roku 2009. Do warsztatowej braci dołączyło Szyfrowanie Klasyczne, Gra w życie oraz Igła Buffona, których uczestnicy mogli spróbować swoich sił w przekazywaniu tajnych wiadomości, opiekowaniu się rozmnażającymi się komórkami i własnoręcznym wyznaczaniu π. Każdy z gości warsztatów mógł też przeszukać rozwinięcie dziesiętne solenizantki w poszukiwaniu zadanej liczby. Oczywiście, czymże byłaby Kawiarenka bez π-niędzy, to znaczy 1 miary – waluty obowiązującej na Instytucie Matematyki przez cały okres obchodów Święta π! Zdobyć je można było na różnorakie sposoby, a zamienić w Kawiarence na jedzenie, picie i fraktalne zakładki. Co ciekawe, sam fakt posiadania wielu miar było dla wielu dostatecznym osiągnięciem. Przez cały dzień trwały również różnorodne wykłady, w czasie których słuchacze mogli poznawać metody krojenia wielościanów, nauczyć się wystrzegać skomplikowanych pułapek czających się w prostej rekurencji i zobaczyć wiele, wiele innych rzeczy.

Naturalnie, goście Święta π mogli spędzać czas na rzeczach innych niż matematyka. Życiowi podejrzliwcy mogli na własne oczy – czasem zawodne, o czym również można się było przekonać - zobaczyć, że stałe fizyczne wynoszą tyle, ile zostało im powiedziane, że wynoszą, a nie jest to spisek nauczycieli i wykładowców. Dodatkowo można było rozejrzeć się po wystawie sprzętu komputerowego, złożyć własny i spróbować swych sił w konkursie informatycznym. Dla osobników, którym wtyczka Microsoft Equation do Worda nie wystarcza, zorganizowany został kurs LaTeXa, prowadzony pod hasłem 'Kubuś Puchatek wybrałby LaTeXa!' Moim zdaniem, postawiony przed wyborem, wybrałby miodek, ale być może informatycy znają Kubusia lepiej niż ja...

Prawdopodobnie jednym z hitów czwartkowego programu był Turniej – zmagania na śmierć i życie, minus i plus, pochodną i całkę, syntezę i analizę, podczas których lała się krew, pot, łzy, atrament i wiele innych dziwacznych rzeczy. Jak się okazało, bezlitosne zmagania mają we krwi nie tylko goście Uniwersytetu, ale również jego pracownicy – po raz trzeci sokolim okiem popisał się dr hab. Alfred Czogała, deklasując rywali w konkursie strzeleckim. Jego zwycięstwa być może powoli staną się małą, πowską tradycją;-)

Niezrażeni negatywną karmą dnia trzynastego marca, który akurat wypadł w piątek, do boju o uwagę i zainteresowanie licealistów i gimnazjalistów przystąpili chemicy, pospołu z fizykami, matematykami i informatykami. Goście mogli spokojnie pozwiedzać Instytut Chemii, nieco mniej spokojnie obserwować niepokojące syki i wybuchy w chemicznych probówkach, z werwą polować na niesforne wielomianowe pierwiastki wśród matematyków, zabawiać się w obalaczy mitów fizycznych wśród fizyków, bądź osiągać szczyty adrenaliny na licznych konkursach. Realizowano się tak pod względem wiedzy okołomatematycznej, jak i w pisaniu fraszek o π(πaszek?). Ci, którym nie wychodziło polowanie na wielomiany, mogli zapolować na swych przeciwników w grze Unreal Tournament. Po raz pierwszy można też było wziąć udział w biegu na orientację, wspólnym dziele czterech Kół Naukowych – Matematyków, Fizyków, Informatyków i Chemików. Uczestnicy musieli wykazać się umiejętnościami logicznego myślenia, radzenia sobie w sytuacjach nieprzewidzianych, zdolności do wyjścia z pewnych szablonów myśleniowych i, ogólnie, to nie był konkurs dla uczniów grzecznie rozwiązujących zadania pod schemat! Bieg okazał się dużym sukcesem i mamy nadzieję, że powróci w przyszłym roku, by po raz kolejny zdzierać zelówki z butów, czapki z głów i szpice z ołówków. Tego dnia odbył się również finał matematycznego konkursu e-πgraMAT, ale w błędzie byłby ten, kto by sądził, że piszący w ławkach jego finaliści mieli lżejsze zadanie czy mniejsze emocje niż ci, którzy biegali po Wydziale, szukając kolejnych stacji i wskazówek w Biegu.

Nie oznacza to jednak, że ci, którzy akurat nie partycypowali w jakimś konkursie, byli skazani na nudę! Wszystkie cztery Instytuty miały dla swych gości niezliczoną ilość wykładów, w czasie których liczono ilość spiralek na truskawkach, zastanawiano się nad teoretyczną zasadnością gry w kości(piętro wyżej można było uzyskaną wiedzę sprawdzić w praktyce), zawierano rozejm między zwaśnionymi państwami, zajmowano się krwią, mikroskopami(również tymi większymi), molekułami, grami komputerowymi, zabezpieczeniami Windowsa Visty... Na wykładach wciąż towarzyszy nam czternastomarcowy solenizant, Albert Einstein, którego teorię w przystępnych słowach również starano się nam przekazać. Od wiedzy głowa kręgiem wiruje, opuszczamy więc salę wykładową i relaksujemy się na warsztatach, które w niezmienionym składzie były czynne również i w piątek. Zadowoleni, poobdarowywani, uzbrojeni w wiedzę licealiści, gimnazjaliści, studenci i pozostali goście Święta rozchodzą się do domów...

...by powrócić w sobotę, 14 marca, na już dokładne co do dnia Święto π, rocznicę urodzin Alberta Einsteina i Wacława Sierpińskiego, powstania drużyny futbolowej Chelsea, Dzień Języka Estońskiego i Święto Słoni – nas najbardziej interesowały te trzy pierwsze punkty. Tego dnia prof. UŚ dr hab. Maciej Sablik uroczyście otworzył Skwerek przed Wydziałem Matematyki, Fizyki i Chemii pod wiele mówiącym adresem Chełkowskiego 3,14. W miejscu tym rosną teraz trzy drzewa i czternaście krzaków, by w najbliższych latach być żywym dowodem, że π występuje w naturze ;-) Naturalnie, również tego dnia dostępne były warsztaty i pokazy, a nawet i wykładów można było posłuchać.

W ciągu trzeciego Święta π obrót Kawiarenki Szkockiej wyniósł kilkaset kawałków ciasta, wiele kaw i herbat oraz dobre kilkadziesiąt zakładek, co oznacza, że rozdane zostało bardzo dużo π-niędzy, co znów oznacza, posługując się prostym logicznym rozumowaniem, że tegoroczne obchody przyciągnęły na Uniwersytet wielu, wielu ludzi. Mamy nadzieję, że również następne(i jeszcze następne, i później kolejne) będą cieszyły się niesłabnącą popularnością tak wśród naszych gości, jak i wśród gospodarzy, którzy prześcigać będą samych siebie w wymyślaniu nowych atrakcji. Π posiada w końcu wiele tajemnic i niejedno Święto jeszcze będzie musiało upłynąć, niż rozwikłamy choćby małą część z nich!

Niewinny Rosomak

[Kilka ciekawostek o spirali logarytmicznej]

Równanie spirali logarytmicznej w układzie biegunowym wygląda następująco:

$$r=ae^{b\varphi} \quad \text{gdzie } a,b \in R \text{ (parametry), } \varphi \in R$$

Równanie jak równanie. Stosunkowo proste. Jednak ta krzywa ma kilka ciekawych własności. Przyjrzyjmy się jej równaniu. Jak zmienia się wygląd krzywej w zależności od parametru a i b?

Zauważmy, że jeśli b=0, to spirala... jest okręgiem o promieniu |a|. Jeśli b>0, to r rośnie wraz ze wzrostem φ . Natomiast jeśli $\varphi \to -\infty$, to $r \to 0$ - -spirala owija się wokół punktu (0,0) (punkt ten nazywamy biegunem spirali logarytmicznej). Jeśli punkt na spirali będzie się poruszał po niej zgodnie z kierunkiem ruchu wskazówek zegara, to punkt ten będzie się zbliżał do bieguna. Oczywiście, jeśli b<0 to spirala zachowuje się "odwrotnie".

Co z parametrem a? Oczywiście parametr a determinuje "rozmiar" spirali. Jednak czy coś jeszcze? Policzmy (dla b różnego od 0 oraz takiego $d \in R$, że $\frac{a+d}{a} > 0$):

$$(a+d)e^{b\varphi} = a\frac{a+d}{a}e^{b\varphi} = ae^{b\varphi} * e^{\ln\frac{a+d}{a}} = ae^{b\left(\varphi + \frac{\ln\frac{a+d}{a}}{b}\right)}$$

Zatem zmiana parametru a o stosowne d powoduje "obrót" spirali o $\theta = \frac{\ln\frac{a+d}{a}}{b}$. Jeżeli narysujemy (np. na komputerze) spirale o równaniu np. $r=ae^{b\varphi}$ i będziemy zwiększać parametr a w przedziale liczb większych od zera, to będziemy widzieli, że płaszczyzna, na której narysowana jest spirala obraca się zgodnie z ruchem wskazówek zegara (dla mniejszych |b| trudniej zauważyć kierunek obrotu, jednak całe zjawisko wygląda ciekawiej).

Pisząc o spirali, nie sposób wspomnieć o tym, że wszystkie półproste wychodzące z jej bieguna przecinają ją pod stałym kątem (niekiedy spirale logarytmiczną definiuje się jako krzywą mającą taką własność). Nie będę tutaj dowodził tego faktu, ponieważ każdy z nas rozwiązywał lub będzie rozwiązywał taki problem na ćwiczeniach z równań różniczkowych.

Zauważmy, że jeśli stoimy w pewnym punkcie $(ae^{b\varphi}, \varphi)$ (czyli jesteśmy w odległości $r_0 = ae^{b\varphi}$ od bieguna) spirali i przemieścimy się o pewien kąt θ , tzn. pójdziemy do punktu $(ae^{b(\varphi+\theta)}, \varphi+\theta)$ (jesteśmy w odległości $r_1 = ae^{b(\varphi+\theta)}$ itd. to ciąg odległości od bieguna spirali $r_n = ae^{b(\varphi+n\theta)}$) jest ciągiem geometrycznym.

Teraz przejdziemy do najciekawszej własności spirali logarytmicznej. Okazuje się, że jeśli wystartujemy z pewnego ustalonego punktu spirali (która naturalnie nie jest okręgiem tzn. parametr b jest różny od 0) i będziemy się poruszać w stronę bieguna, to oczywiście biegun spirali okrążymy nieskończenie wiele razy, ale droga jaką pokonamy jest skończona. Aby to pokazać przyjmijmy, że b>0, tzn. zbliżamy się do środka jeśli $\varphi \to -\infty$. Niech naszym punktem początkowym będzie (r_0, φ_0) leżący na spirali. Policzmy:

$$L = \lim_{\Phi\to-\infty} \int_{\Phi}^{\varphi_0} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi =$$

$$\lim_{\Phi\to-\infty} \int_{\Phi}^{\varphi_0} \sqrt{a^2e^{2b\varphi} + a^2b^2e^{2b\varphi}}\, d\varphi =$$

$$a\sqrt{1+b^2} \lim_{\Phi\to-\infty} \int_{\Phi}^{\varphi_0} e^{b\varphi}\, d\varphi =$$

$$a\frac{\sqrt{1+b^2}}{b} \left(\lim_{\Phi\to-\infty} (e^{b\varphi_0} - e^{b\Phi})\right) =$$

$$r_0\frac{\sqrt{1+b^2}}{b} < +\infty$$

Dla $b < 0$ dowód przebiega analogicznie, wystarczy policzyć $\lim_{\Phi\to-\infty}\int_{\Phi}^{\varphi_0} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$ Własność tą odkrył Evangelista Torricelli (1608 -1647) - m.in. wynalazca barometru.

Spirala logarytmiczna (podobnie jak ciąg Fibonacciego czy złoty podział) dość powszechnie występuje w przyrodzie. Można pokazać (wynika to wprost z tego, że spirala logarytmiczna tworzy ze swoimi promieniami stały kąt), że ciało porusza się po spirali logarytmicznej wtedy i tylko wtedy, gdy kąt między wektorem wodzącym (wektorem pokazującym położenie ciała) a wektorem prędkości tego ciała jest stały. Ma to daleko idące konsekwencje. Przykładowo ramiona galaktyk spiralnych są fragmentami spirali logarytmicznych.

Vil

[Stopa redakcyjna]

Kontakt z redakcją: bezpośrednio- w pokoju KNM (p.524) lub pocztą elektroniczną na adres:

macierzator@knm.katowice.pl www.macierzator.yoyo.pl