[MACIERZATOR25]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

TEX-AS NEWSPAPER

Witamy w listopadowym numerze [Macierzatora]!

Zwracamy szczególną uwagę na nową strukturę oraz na informację o zbiórce mikołajkowej (patrz - ostatnia strona).
Czekamy na Wasze sugestie i komentarze, również odnoszące się do nowej szaty graficznej!
Trywialnych zadań na kolokwiach życzy -

redakcja

[Funkcja Ackermanna]

Tak to się czasem w matematyce zdarza, że niektóre obiekty są złośliwe. Niektóre nawet bardzo. Przykładem takiego obiektu jest niewinnie wyglądająca funkcja $A\colon \mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ określona wzorem:

$$A(x,y)=\begin{cases} y+1 & ,x=0\\ A(x-1,1) & ,x>0 \text{ oraz } y=0\\ A(x-1,(A(x,y-1))) & ,x>0 \text{ oraz } y>0\end{cases}$$

Jest to tak zwana funkcja Ackermanna. Aby przekonać się, jak bardzo jej nie lubimy, policzmy $A(2,1)$:

$$\begin{aligned} A(2,1) &= A(1,A(2,0)) = A(1,A(1,1)) = A(1,A(0,A(1,0))) = \\ &= A(1,A(1,0)+1) = A(1,A(0,1)+1) = A(1,3) = \\ &= A(0,A(1,2)) = A(1,2)+1 = A(0,A(1,1))+1 = \\ &= A(1,1)+2 = A(0,A(1,0))+2 = A(1,0)+3 = \\ &= A(0,1)+3 = 2+3 = 5\end{aligned}$$

Żeby dokonać powyższych obliczeń, należało odwołać się 14 razy do definicji funkcji. W tabeli poniżej przedstawiono niektóre wartości funkcji Ackermanna (w nawiasie jest podana liczba wywołań funkcji).

y ∖ x	0	1	2	3
0	1 (1)	2 (2)	3 (5)	5 (15)
1	2 (1)	3 (4)	5 (14)	13 (106)
2	3 (1)	4 (6)	7 (27)	29 (541)
3	4 (1)	5 (8)	9 (44)	61 (2432)

Widzimy, że liczba wywołań funkcji rośnie bardzo szybko. Kiedy usłyszałem o funkcji Ackermanna, postanowiłem policzyć na komputerze wartość $A(4,1)$. Niestety, mój komputer powiesił się po ok. 942 000 000 wywołaniu funkcji.

Czy jednak funkcja, o której mowa, jest na wskroś zła? Czy istnieją jakieś metody pozwalające obliczać wartości tej funkcji? (przynajmniej dla niektórych argumentów). Okazuje się, że tak! Najpierw zauważmy, że:

$$A(0,y)=y+1$$

Jest to oczywisty wniosek z definicji. Dalej zauważmy, że

$$A(1,y)=y+2=2+(y+3)-3 \qquad (\star)$$

Aby to uzasadnić, policzmy:

$$\begin{array}{rcl} A(1,y) & = & A(0,A(1,y-1)) \quad = \quad A(1,y-1)+1 = \\ & = & A(0,A(1,y-2))+1 \quad = \quad A(1,y-2)+2 = \\ & & \dots \\ & = & A(0,A(1,0))+y-1 \quad = \quad A(1,0)+y = \\ & = & y+2 \end{array}$$

Dalej zauważmy, że

$$A(2,y) = 2y+3 = 2(y+3)-3 \tag{$\star\star$}$$

Znowu policzmy, korzystając ze wzoru $(\star)$:

$$\begin{array}{rcl} A(2,y) & = & A(1,A(2,y-1)) \quad = \quad A(2,y-1)+2 = \\ & = & A(1,A(2,y-2))+2 \quad = \quad A(2,y-2)+4 = \\ & & \dots \\ & = & A(1,A(2,0))+2(y-1) \quad = \quad A(2,0)+2y = \\ & = & 2y+3 \end{array}$$

Znowu zauważmy, że:

$$A(3,y) = 2^{y+3}-3 \tag{$\star\star\star$}$$

Zanim przejdziemy do "uzasadnienia", przypomnijmy sobie, że $3+3\cdot 2+\ldots+3\cdot 2^{y-1} = 3\cdot(2^y-1)$. Policzmy:

$$\begin{array}{rclcl} A(3,y) & = & A(2,A(3,y-1)) & = & 2A(3,y-1)+3 \\ & = & 2A(2,A(3,y-2))+3 & = & 2^2\cdot A(3,y-2)+3\cdot 2+3 \\ & = & 2^2\cdot A(2,A(3,y-3))+3\cdot 2+3 & = & \\ & = & 2^3\cdot A(3,y-3)+3\cdot 2^2+3\cdot 2+3 & = & \\ & & \dots & & \\ & = & 2^{y-1}\cdot A(3,0)+3\cdot 2^{y-2}+\ldots+3 & = & 2^y\cdot A(3,0)+\sum_{i=0}^{y-1} 3\cdot 2^i = \\ & = & 5\cdot 2^y+3\cdot(2^y-1) & = & 2^{y+3}-3 \end{array}$$

Przyjrzyjmy się wzorom $(\star)$ - $(\star\star\star)$. Zauważmy, że między cyfrą 2 a czynnikiem $(y+3)$ występują kolejno działania dodawania, mnożenia i potęgowania, czyli wraz ze wzrostem liczby x zwiększa się „rząd” działania.

Zanim podamy dalsze wzory, ułatwiające obliczanie wartości funckji Ackermanna, wprowadzimy nową notację, tzw. notację strzałkową Kuntha. Przyjmijmy, że $a\uparrow b = a^b$, dalej niech $a\uparrow\uparrow b = \underbrace{a\uparrow\ldots\uparrow a}_{b}$ (liczba a występuje b razy), $a\uparrow\uparrow\uparrow b = \underbrace{a\uparrow\uparrow\ldots\uparrow\uparrow a}_{b}$ itd. (działania wykonujemy od prawej).

Bardziej formalnie ($\uparrow^n$ oznacza $\underbrace{\uparrow \ldots \uparrow}_{n}$):

$$a \uparrow^n b = \begin{cases} 1 & , b = 0 \\ a^b & , n = 1 \\ a \uparrow^{n-1} (a \uparrow^n b - 1) & , \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

W tym miejscu warto wspomnieć o liczbach Ackermanna. Są to liczby postaci $n \uparrow^n n$. Nie będę pisał o tym, jak ogromne one są, ponieważ prawdopodobnie nie zmieściłbym się w tym numerze Macierzatora. Jako ćwiczenie polecam policzenie $3 \uparrow\uparrow\uparrow 3$.

Teraz wzór $(\star\star\star)$ możemy zapisać jako: $A(3, y) = 2 \uparrow (y+3) - 3$. Przez analogię, można uwierzyć, że:

$$A(x, y) = 2 \uparrow^{x-2} (y+3) - 3, \; x > 2 \qquad \left(\underbrace{\star \ldots \star}_{x}\right)$$

Udało nam się napisać jakiś ładny wzór pozwalajacy obliczać wartosci omawianej funkcji. Pamiętajmy jednak, że niestety obliczanie wartości wyrażeń zawierających strzałki jest bardzo czasochłonne.

Tutaj już widzimy inną przedziwną cechę omawianej funkcji. Funkcja Ackermanna rośnie niewyobrażalnie szybko.

Czy funkcja Ackermanna ma jakiekolwiek zastosowanie? Okazuje się, że ma ona szerokie zastosowania tak w praktyce jak i w teorii obliczeń. Jest ona obok funkcji Buck'a i Sudana używana m.in. podczas optymalizacji działania programów.

vil

[Geek Corner]

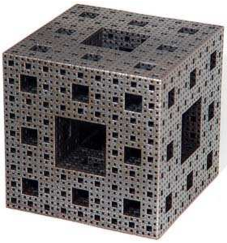
Q: What is a mathematician's pick when faced with the choice between pudding and eternal bliss in the afterlife?
A: Pudding! Because nothing is better than eternal bliss in the afterlife, and pudding is better than nothing.

Q: What is non-orientable and lives in the ocean?
A: Möbius Dick...

Math problems? Call 1-800-[(10x)(13i)2]-[sin(xy)/2.362x].

[„Matematyka w obrazkach”]

Sprawozdanie z XXVII wyjazdowej sesji KNM



Matematycy to też ludzie. Jest to twierdzenie, którego dowód jest długi, niekonstruktywny, nietrywialny i korzysta z pewnika wyboru, więc przez wielu jest ono odrzucane. Jednak tegoroczna sesja dała nam do rąk potężny argument dla podtrzymania tej tezy. Otóż w organizacji sesji nie przeszkodził kontrowersyjny temat, niedopisująca pogoda, kryzys gospodarczy, ani nawet kolejne porażki w dowodzie hipotezy Riemanna. Za to uczestników sesji przerzedziły i przetrzebiły choroby, zwężając liczbę uczestników z planowanej trzydziestki do osób dwudziestu trzech , z których zeszłoroczna (c)hairwoman przez wyjazd cały zmagała się z ciężkim przypadkiem jadłowstrętu (co dla wszystkich znających Anię powinno być dostatecznym znakiem, jak bardzo musiała się źle czuć, a dla nas oznaczało, że mieliśmy jakieś dwa razy więcej jedzenia, niż było zaplanowane ;)). Miejmy nadzieję, że do maja szalejące choroby się troszkę uspokoją i pozwolą nam całą hordą posesjować.

Sesja odbyła się jednak pomimo tych drobnych przeszkód – trzeba więcej, niż marne wirusy, by powstrzymać nas przed przyjazdem do Szczyrku! Wrota ośrodka stanęły otworem w piątkowy wieczór i przez długi czas słychać zeń było odgłosy zmywania naczyń oraz przyjazdów kolejnych grup. Po kolacji przystąpiliśmy do rozplanowania dnia i postawienia pierwszych propozycji tematu następnej sesji, głosowanie jednak pozostawiając sobie na dzień następny, by pierwej lepiej się wczuć w matematyczny nastrój.
Z powodu przetrzebienia również oddziału referujących, referaty postanowiliśmy odłożyć na sobotę, piątek pozostawiając sobie na naładowanie matematycznych baterii. Na sesję również wprowadziliśmy pomiędzy nas Mordercę, który w trakcie tych trzech dni miał zebrać spore żniwo, pozostawiając za sobą sznur ciał... Ale o tym za chwilę.

We wczuwaniu się w nastrój wydatnie pomogła gra w Jungle Speeda, która zajęła części z nas resztę wieczoru. Ofiar *w ludziach* - na szczęście zero ;) Jakkolwiek wielu uczestników sesji grało wtedy po raz pierwszy, woli walki nie zabrakło nikomu. Druga część z nas, na zaproszenie gości z Politechniki Krakowskiej, spędziła ten czas, zagłębiając się w największy kontrprzykład na twierdzenie podane w pierwszym akapicie, który jednak, mam nadzieję, nie zachwiał w nich wiary w prawdziwość napisanej tamże tezy. Jak się jednak okazało, rozłączenie się na dwie grupy zaktywizowało Mordercę, zwanego w pewnych kręgach Zbrodnicielem, i część z nas nie ujrzała sobotniego poranka żywymi.

Wielu z pozostałych ujrzało sobotni poranek na tyle żywymi, na ile da się być żywym po prawie-nieprzespanej nocy. Weterani szczyrkowskich sesji, niezrażeni takimi drobiazgami (siła przyzwyczajenia) przygotowali jednak śniadanie bez opóźnień (a nawet z lekkim uwcześnieniem, ku rozpaczy tych nieco mniej przyzwyczajonych do szczyrkowskiego trybu życia), a niektórzy to poświęcenie przypłacili nawet śmiercią z rąk Zbrodniciela, który działał aktywnie, szybko i efektywnie. Krąg podejrzanych zacieśniał się bardzo szybko, ale pozostali żywi wciąż wahali się ze wskazaniem winnego.

Po śniadaniu jednak o Mordercy trzeba było na chwilę zapomnieć, bo nadszedł ten czas, na który czekali wszyscy – czas referatów. Cykl otworzył Tomek Kania, roztaczając przed nami wizje możliwości, jakie dają nam różne aksjomatyki, wprowadził za... bardzo dobry porządek i rozpalił w nas zainteresowanie dziedzinami, o których istnieniu niektórzy z nas w ogóle wcześniej nie wiedzieli. Po takim początku Jola Marzec miała przed sobą trudne zadanie dorównania poprzednikowi, jednak, pomimo buntu komputera i tego paskudnego Platona, wyszła ze starcia obronną ręką, w elegancki sposób rozwiązując słynne problemy starożytnych Greków. W międzyczasie okazało się, że nie wszyscy zapomnieli na czas referatów o działalności Zbrodniciela i ów wygrał grę, zabijając biedną referującą na oczach wszystkich. Konrad Pietruszewski, bo onże to był, zwyciężył pomimo wielu przeciwności i załączamy stąd dlań ogromne gratulacje i podziękowania za miłą grę (ale i zapewnienie, że na następnej sesji pomyślimy dwa razy, nim spojrzymy Ci w oczy). Nasze matematyczne umysły zdołały się już rozgrzać, więc z ochotą przystąpiliśmy do gry zorganizowanej przez Tomka Ziarko i Konrada „Mordercy" Pietruszewskiego, dzięki czemu możemy z czystym sumieniem powiedzieć, że na choinkach znamy się całkiem nieźle, a goście

z Politechniki mogą z czystym sumieniem powiedzieć, że sprawili nam sporo radości zarówno samą grą, jak i upominkami dla zwycięskiej drużyny.

Po przerwie obiadowej kontynuowaliśmy cykl referatowy. Żółw z pędzlem na ogonie potrafi rysować proste krzywe – Piotr Idzik zawstydził żółwia, rysując z jego pomocą o wiele więcej. W chwilę później żółw mógł jednak przejść na emeryturę i zamiast rysować trójkąt Sierpińskiego na piechotę, zająć się relaksującą grą w chaos, w tajniki której wprowadził nas Jakub Szotek, opowiadając o tym i wielu innych fraktalach. Od bakterii, które zakończyły referat piąty, przeszliśmy do krokodyli, które rozpoczęły referat szósty, prowadzony przez Weronikę Siwek. Dowiedzieliśmy się, że zielonoskóre gady nie były lubiane przez pewnego Linneusza, oraz że tamtejsze samce nie muszą obawiać się sytuacji, która zagraża samcom ludzkim i którą roztoczył przed nami, biedakami, Machulski w swojej Seksmisji. Etap naukowy zakończył Mateusz Jurczyński, opowiadając o piratach i ich metodach podziału łupów. W zorganizowanym następnie plebiscycie na najlepszego wykładowcę zwyciężył Tomek Kania, przewagą niewiadomojaką dzięki dyskrecji jury ;)

Tym sposobem zakończył się etap naukowy XXVII sesji wyjazdowej Koła Naukowego Matematyków. Oczywiście, nie bylibyśmy sobą, gdyby to był już koniec ciekawych sesjowych wydarzeń – spory swój udział miały tu wybuchy maści wszelakiej, tak BANG! karciany, jak i Big Bang ekranowy, z

którym gospodarze spotkali się po raz pierwszy, a goście... nie tak do końca, ale towarzyszyli nam przy nim z godnością, pogodą i cierpliwością, za co serdecznie dziękujemy. Poza tym graliśmy w skata, trwały rozmowy matematyczne i nie tylko, nawet kilkoro z nas zaliczyło przygodę kryptologiczną, jednak opowieść o tych wszystkich rzeczach zajęłaby znacznie więcej miejsca, niż możemy tu na to przeznaczyć. Na temat następnej sesji wybrano 'Alternatywne dowody twierdzeń' i liczymy na inwencję twórczą referujących.

A ja idę się zająć twarożkiem, który tradycyjnie otrzymałem na zakończenie sesji :)

Niewinny Rosomak

[Ogłoszenie]

Przypominamy, że Koło Naukowe Matematyków UŚ organizuje cykliczne:

- referaty dla licealistów (co drugi piątek),
- spotkania kółka dla uczniów szkół średnich (aktualnie co drugą sobotę),
- referaty kołowe (średnio co drugi czwartek), skierowane do studentów.

Informacje o terminach najbliższych spotkań dostępne są na stronie internetowej www.knm.katowice.pl oraz na drzwiach pokoju 524 - umieszczane są one zazwyczaj z około tygodniowym wyprzedzeniem. Serdecznie zapraszamy wszystkich zainteresowanych studentów, nie tylko członków Koła, do uczestnictwa (nawet jeśli tylko biernego).

Koło Naukowe Matematyków organizuje w dniach 30 XI - 4 XII 2009 r.

Zbiórkę Mikołajkową

na rzecz Domu Dziecka Stanica w Katowicach.

Wychowankami tego domu są chłopcy w wieku nastoletnim.

Zbieramy dla nich:

- różnego rodzaju przybory piśmiennicze i kreślarskie (długopisy, ołówki, kredki, itp.)
- artykuły papiernicze (zeszyty, brystole, bloki, itp.)
- środki czystości (mydła, męskie dezodoranty, dezodoranty do stóp, przybory do golenia)
- gry komputerowe

Zbiórka przeprowadzona będzie na terenie całego Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii. W określonych miejscach będą wystawione kosze, gdzie będzie można zostawiać rzeczy.
Informacje, pytania, szczegóły - w pokoju 524 lub mailem knm@knm.katowice.pl.

Za uTEXniczenie Macierzatora składamy serdeczne podziękowania Michałowi Stolorzowi.

[Stopka redakcyjna]

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524)
lub elektronicznie: macierzator@knm.katowice.pl

listopad 2009