[π-MACIERZATOR]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

[Czy warto grać w ruletkę?]

Szukając w Internecie informacji do tego artykułu, na wielu stronach spotkałem się z pozytywną odpowiedzią na tytułowe pytanie, gdyż *przewaga kasyna wynosi zaledwie* $2,7\%$ *w odmianie europejskiej i* $5,4\%$ *w odmianie amerykańskiej, co daje duże szanse wygranej.* Później padały stwierdzenia, że *po dłuższej grze zacznie sprawdzać się statystyka i będziemy stratni owe* $2,7\%$ *(ewentualnie* $5,4\%$*).* Raz nawet przeczytałem, że *niektóre internetowe kasyna podwajają nasz początkowy wkład, więc i tak bardzo nam się to opłaca!* A jak jest naprawdę?

Ruletka wygląda mniej więcej tak: znajduje się na niej 36 pól ponumerowanych liczbami od 1 do 36 (18 czarnych i 18 czerwonych) oraz jedno pole dodatkowe (w wersji amerykańskiej dwa dodatkowe pola). Istnieje wiele różnych sposobów gry; zajmijmy się najprostszym z nich. To znaczy nasz zakład polega na obstawieniu koloru lub parzystości liczby. Jak łatwo policzyć, w obu przypadkach prawdopodobieństwo wygranej wynosi $\frac{18}{37}$ ($\frac{18}{38}$ dla wersji amerykańskiej). A ile wynosi prawdopodobieństwo zakończenia gry, mając m zł, zaczynając z kapitałem n zł, oraz obstawiając 1 zł w pojedynczej grze (gramy do uzbierania m zł lub utraty wszystkich pieniędzy)? Może się wydawać, że gdy $m < 2n$, to nie aż tak mało.

Dla zwiększenia ogólności i uproszczenia zapisu powiedzmy, że prawdopodobieństwo wygrania pojedynczej gry wynosi p, zaś przegrania q ($p < q$ oraz $p + q = 1$). Niech p_i będzie prawdopodobieństwem wygrania (tzn. zakończenia gry z kapitałem m zł), mając aktualnie i zł. Łatwo zauważyć, że ciąg $(p_i)_{i=0}^{i=m}$ spełnia zależność rekurencyjną

$$p_i = q \cdot p_{i-1} + p \cdot p_{i+1} \quad \text{dla } i = 1, \ldots, m-1.$$

Rozwiązując równanie charakterystyczne

$$x = q + px^2,$$

otrzymujemy dwa pierwiastki: 1 oraz $\frac{q}{p}$. Zatem rozwiązaniem jest

$$p_i = c_1 + c_2 \cdot \left(\frac{q}{p}\right)^i.$$

Uwzględniając warunki $p_0 = 0$ i $p_m = 1$, wyznaczamy stałe c_1 i c_2

$$c_1 = \frac{1}{1 - (\frac{q}{p})^m} \quad \text{i} \quad c_2 = \frac{-1}{1 - (\frac{q}{p})^m}.$$

Zatem ostatecznie

$$p_i = \frac{1 - (\frac{q}{p})^i}{1 - (\frac{q}{p})^m}.$$

Nadszedł czas na to, aby do otrzymanego wzoru wstawić konkretne wartości. Przykładowo, prawdopodobieństwo zwiększenia kwoty 900 zł do 1000 zł wynosi 0,00448 dla ruletki europejskiej i $2,66 \cdot 10^{-5}$ dla ruletki amerykańskiej, zaś prawdopodobieństwa podwojenia kwoty 500 zł wynoszą odpowiednio $1,8 \cdot 10^{-12}$ i $1,3 \cdot 10^{-23}$...

Pozostawmy otrzymane wartości bez komentarza, za to na zakończenie ciekawostka: ile wynosi suma wszystkich liczb na ruletce? Odpowiedź brzmi: 666.

Szymon

[Kawiarnia Szkocka]

Za granicą mówią: „X to dobry matematyk; z pewnością Polak”.
U nas mówią: „Y to prawdziwy Polak; z pewnością słaby matematyk”.

Hugo Steinhaus

W zeszłym miesiącu opublikowano wyniki pewnej ankiety. Respondentów pytano, w czym Polacy są najlepsi na świecie. Bezapelacyjnie zwyciężyła odpowiedź „w matematyce”. Lemat Kuratowskiego-Zorna, przestrzeń Banacha, logika Łukasiewicza - to podstawowe pojęcia, jakie poznaje student matematyki podczas pierwszego roku studiów. Twierdzenie Banacha o punkcie stałym to najczęściej cytowane twierdzenie matematyczne. Chyba najsłyniejszymi matematykami polskimi są Marian Rejewski, Henryk Zygalski i Jerzy Różycki, którzy złamali kod Enigmy (można o nich przeczytać więcej w π-ografii), jednak wśród naukowców najbardziej znani są przedstawicie polskiej szkoły matematycznej. Nazywa się tak matematyków polskich okresu międzywojennego. Działali oni głównie w trzech miastach: Lwowie, Warszawie i Krakowie. My zatrzymamy się na dłużej przy lwowskiej szkole matematycznej.

Przed wybuchem II wojny światowej we Lwowie mieszkało wielu wybitnych matematyków, takich jak Stefach Banach, Hugo Steinhaus, Stanisław Ulam czy Stanisław Mazur. Wykładali oni we lwowskich wyższych uczelniach, ale miejsce ich pracy zdecydowanie nie ograniczało się do gmachów uniwersyteckich, a atmosfera znacząco odbiegała od steretypowej „naukowej”. Jak wspomina Stanisław Ulam:

Stanisław Ulam

Znaczna część naszych rozmów matematycznych toczyła się w położonych w pobliżu uniwersytetu kawiarniach. Pierwsza z nich nazywała się „Roma". Po roku, lub dwóch, Banach zadecydował, że należy nasze sesje przenieść do „Kawiarni Szkockiej", położonej po przeciwległej stronie ulicy. (...) Wydaje mi się obecnie, że jedzenie było średnie, lecz napojów było pod dostatkiem. Stoły kawiarniane były pokryte płytami marmurowymi, na których można było pisać ołówkiem, co ważniejsze, szybko ścierać. W naszych matematycznych rozmowach częstokroć słowo lub gest bez żadnego dodatkowego wyjaśnienia wystarczały do zrozumienia znaczenia. Czasem cała dyskusja składała się z kilku słów rzuconych w ciągu długich okresów rozmyślania. Widz siedzący przy innym stole mógł zauważyć nagłe krótkie wybuchy konwersacji, napisanie kilku wierszy na stole, od czasu do czasu śmiech jednego z siedzących, po czym następowały okresy długiego milczenia, w czasie których tylko piliśmy kawę i patrzyliśmy nieprzytomnie na siebie. Tak wytworzony nawyk wytrwałości i koncentracji, trwającej czasami godzinami, stał się dla nas jednym z najistotniejszych elementów prawdziwej pracy matematycznej.[1]

Kaw. Szkocka

Myliłby się jednak ten, kto sądziłby, że spotkania w kawiarni były bardziej towarzyskie, niż naukowe. Stanisław Ulam mówi o tym bardzo wyraźnie: *Sądzę, że te wielogodzinne kawiarniane dyskusje z Banachem, a częściej z Banachem i Mazurem, były czymś unikalnym. Nigdzie i nigdy nie zdarzyło mi się nic, co by przewyższało, dorównywało lub choćby zbliżało się do skali i natężenia naszej ówczesnej współpracy – z wyjątkiem być może Los Alamos w latach wojny.* W Kawiarni Szkockiej przesiadywali głównie profesorowie, ze studentów często przebywali w niej jedynie dwaj najzdolniejsi, wśród nich Ulam. Zaproszenie do Kawiarni było dla młodych matematyków bardzo nobilitujące - porównywali je do pasowania na rycerza.

Oryginalna metoda spotkań miała zasadniczą wadę: spisywane na marmurowych blatach stolików notatki były systematycznie unicestwiane przez pracujące w kawiarni sprzątaczki. Co więcej, wielu matematyków nie przywiązywało uwagi do spisywania swych odkryć (i tak na przykład plotka głosi, że gdyby nie asystenci, Banach nigdy nie opublikowałby drukiem żadnej ze swych prac), ale jeszcze więcej zostało bezpowrotnie straconych (jak choćby rezultat sesji, która trwała 117 (sic!) godzin - dowód pewnego ważnego twierdzenia z przestrzeni Banacha). Na szczęście dla przyszłych

[1] Stanisław Ulam „Wspomnienia z Kawiarni Szkockiej", w: Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II: Wiadomości matematyczne XII, 1969

pokoleń, w 1935 roku żona Banacha, Łucja, kupiła gruby kajet z marmurową okładką. I właśnie ten zwykły zeszyt za dwa złote i pięćdziesiąt groszy przeszedł do matematycznej historii. We „Wspomnieniach...” Stanisław Ulam pisze:


Stefan Banach

Duży zeszyt, w którym miały być zapisywane problemy, z podaniem przy każdym nazwisku autora i daty. Zeszyt ten był przechowywany w kawiarni i kelner przynosił go na żądanie. Wpisywaliśmy problem, a kelner ceremonialnie zabierał go z powrotem na miejsce, gdzie był chowany. Dokument ten stał się później głośny pod nazwą „Księga Szkocka”, - od nazwy kawiarni.

Problemat mógł wpisać do Księgi teoretycznie każdy, jednak autorami byli najczęściej wybitni uczeni z kraju i zagranicy (do tych ostatnich należał m.in. John von Neumann, który w Księdze Szkockiej zapisał - po niemiecku - zagadnienie dotyczące algebry Boole'a i za jego rozwiązanie oferował butelkę whisky „miary większej niż zero”). Jako pierwszy zanotował w niej coś - a jakże - sam Stefach Banach (dokładnie było to zagadnienie dotyczące przestrzeni metrycznej, a wpis nosi datę 7 lipca 1935 roku). W kajecie zapisano 193 problemy o różnej wartości naukowej. Można wśród nich znaleźć błahe łamigłówki o wartości zabawowej, ale też - fundamentalne zagadnienia z analizy funkcjonalnej, z której słynęła cała lwowska szkoła matematyczna (był to jak na ówczesne czasy bardzo nowoczesny dział matematyki, a do dzisiaj jest jednym z najważniejszych; twórcą pierwszej na świecie monografii z tej dziedziny był właśnie Banach). Autorem ostatniego wpisu jest Hugo Steinhaus, który 31 maja 1941 roku zanotował problemat poświęcony podziałowi liczby zapałek w pudełku.

A dlaczego John von Neumann oferował autorowi rozwiązania whisky? Otóż jedną z najbardziej charakterystycznych cech tej Księgi było to, że autorzy problemów często wyznaczali nagrody za ich rozwiązanie. Oferowane upominki były przeróżne. I tak na przykład 6 listopada 1936 roku Hugo Steinhaus zapisał pod numerem 152 następujący problemat:

Koło (tarcza) o promieniu l pokrywa co najmniej dwa punkty kraty całkowitych (x, y), co najwyżej 5. Gdy przesuwamy koło o wektory nr (nr = 1,2,3-...), gdzie w ma obie składowe niewymierne i stosunek ich niewymierny, to liczby 2,3,4 powtarzają się nieskończenie wiele razy. Jaka jest frekwencja tych zdarzeń dla $n \to \infty$? Czy jest? [Za obliczenie frekwencji: 10 dkg kawioru czerwonego Za dowód istnienia: małe piwo Za przykład przeciwny: mała czarna]

Do oryginalniejszych nagród można zaliczyć kilogram bekonu czy szwajcarskie fondue (do odebrania w Genewie). Z kolei w 1936 roku Stanisław

Mazur, znany ze specyficznego poczucia humoru, wpisał do „Księgi Szkockiej” problem dotyczący pozytywnego lub negatywnego rozwiązania zagadnienia bazy w przestrzeniach Banacha, obiecując jako nagrodę żywą gęś. Zadanie okazało się bardzo trudne - wielu najwybitniejszych matematyków świata usiłowało je bezskutecznie rozwiązać. W końcu, po 36 latach, rozwiązanie znalazł młody matematyk szwedzki Per Enflö i... dostał od Mazura obiecaną żywą gęś (notabene w Centrum im. Stefana Banacha w Warszawie).[2]

Wybuch wojny nie był obojętny dla dalszych losów polskiej szkoły matematycznej. W czasie okupacji grupa uległa rozproszeniu, a większość jej czołowych przedstawicieli straciła życie, głównie z rąk sowieckich i hitlerowskich żołnierzy. Wśród zmarłych był Stefan Banach. Przetrwała jednak Księga Szkocka. Oddajmy jeszcze raz głos Stanisławowi Ulamowi:


Mazur, Enflo i gęś

Ostatni raz widziałem Banacha późnym latem 1939 r. w Kawiarni Szkockiej. Dyskutowaliśmy o możliwości wojny z Niemcami. Mimo ówczesnej sytuacji rozmawialiśmy jeszcze o matematyce i wpisaliśmy kilka problemów do Księgi Szkockiej. Mazur, który był wówczas z nami i był znacznie pewniejszy od nas, że wybuchnie wojna, nagle powiedział do mnie: „Wiele z naszych wspólnych rezultatów nigdy nie opublikowaliśmy; zamierzam schować nasze rękopisy w puszce, którą gdzieś zakopię, np. w pobliżu bramek jakiegoś boiska piłki nożnej. Pan wyjeżdża do Stanów, być może znajdzie je Pan po wojnie, gdy już będzie po wszystkim”.

Dzisiaj nie jest wiadome, czy Księgę naprawdę zakopano w pobliżu bramki - według innej wersji wydarzeń ocaliła ją jej ofiarodawczyni, Łucja Banachowa, wywożąc kajet ze Lwowa do Warszawy w trakcie przymusowej repatriacji. Niezależnie od tego, jakie były losy księgi podczas wojny, Stanisław Ulam otrzymał od Hugona Steinhausa kopię po wojnie, tak jak to przepowiedział Stanisław Mazur. Oryginalny rękopis znajduje się obecnie w Niemczech, w posiadaniu potomków Stefana Banacha. Dzięki Stanisławowi Ulamowi, który przetłumaczył zapiski i rozesłał tłumaczenie do wielu przyjaciół w Europie i USA, Księgę Szkocką poznał cały matematyczny świat.

Stanisław Ulam

A czy Stefan Banach naprawdę tak wielkim matematykiem był? I czy naprawdę Kawiarnia Szkocka była dla matematyków tak ważna? Chyba najlepiej mówi o tym ta historia:

[2] Dla zainteresowanych: rozwiązanie jest negatywne.

Jeden z najwybitniejszych ówczesnych uczonych, amerykański matematyk węgierskiego pochodzenia John von Neumann, wielokrotnie nakłaniał Banacha do emigracji do USA. Ostatni raz był we Lwowie w 1937 roku. Wtedy wyjął czek podpisany przez Norberta Wienera, ojca cybernetyki, na którym tenże postawił tylko jedną cyfrę: 1. Banach miał dopisać za nią tyle zer, ile tylko zechce. Polski matematyk odpowiedział jednak, że nie zna liczby zer, które by mu zrekompensowały Polskę, Lwów i Kawiarnię Szkocką.

Ania

(Od Autorki: Serdecznie zachęcam do zapoznania się z całością „Wspomnień z Kawiarni Szkockiej" Stanisława Ulama, które stanowią fascynującą lekturę. Można je znaleźć np. pod adresem internetowym `http://www.lwow.com.pl/banach/ulam-wspomnienia.html`)

[πografie - Enigmowa Trójca]

Niestety, nigdy nie było grupy matematycznych superbohaterów - Kapitana Całki, Człowieka-Macierzy i Niewiadomej Kobiety - występującej wspólnie jako Enigmowa Trójca, przeżywającej zwariowane przygody i krzyżującej raz po raz demoniczne plany Imperatora Urojonego. Mimo to, myślę, że każdy, kto choć trochę wie o historii kryptografii i polskim wkładzie w złamanie szyfru Enigmy, nie ma żadnego problemu z rozgryzieniem, jaką trójkę matematyków ukrywam pod tym dziwacznym kryptonimem.

Marian Rejewski, Jerzy Różycki, Henryk Zygalski, czyli 'Polak potrafi'. To oni *zaoszczędzili światu co najmniej dwóch lat wojny i prawdopodobnie zapobiegli zwycięstwu Hitlera*, według słów Władysława Kozaczuka i Jerzego Straszaka. A dziś dla młodych polskich kryptologów są trochę jak Małysz dla młodych polskich skoczków narciarskich.


M. Rejewski

Rozpocznijmy, dla formalności, od przypomnienia, co takiego zrobiła ta trójka. Otóż przed II wojną światową, w roku 1918, niemiecki inżynier Artur Scherbius opatentował maszynę szyfrującą, przypominającą w budowie maszynę do pisania. Miała ona w sobie na tyle duży potencjał, że niemiecka marynarka wojenna w 1925 roku zaadaptowała ją do swoich celów. Maszyna, dzięki systemowi wirników oraz dołączonej później przełącznicy kablowej, pozwalała szyfrować teksty w sposób dający praktycznie stuprocentowe zabezpieczenie przed dekryptażem - tak się przynajmniej Niemcom wydawało. To wrażenie nie było jednak niebezpodstawne - szyfr Enigmy dawał olbrzymie ilości kombinacji, które ewentualny kryptolog musiałby przetestować w czasie próby dekryptażu. Oczywiście, fakt, że Niemcy posiadali szyfr czyniący czytanie ich depesz niemożliwym, nie był zbytnio na rękę innym europejskim państwom.

W roku 1929 dla dwudziestu kilku mówiących po niemiecku studentów Uniwersytetu Poznańskiego zorganizowano tajny kurs kryptologii, nadzorowany przez Polskie Biuro Szyfrów. Na tymże kursie wyróżniała się wyżej wspomniana trójka studentów, będąc na przykład jednymi z niewielu studentów zdolnych, bez widocznego pogorszenia wyników, połączyć kurs ze zwykłym studiowaniem matematyki. Po studiach ta trójka otrzymała pracę w poznańskim Biurze, a później - we wrześniu 1932 - w Warszawie. Ich pierwszym osiągnięciem było złamanie szyfru używanego przez Kriegsmarine, co było możliwe dzięki wydedukowaniu, że treścią testowej wymiany depesz między dwiema stacjami było zapytanie „Kiedy urodził się Fryderyk Wielki?" i odpowiedź „1712". W trakcie tych prac Rejewski, w najściślejszej tajemnicy, rozpoczął już zmagania z maszyną Enigma I, która była wtedy coraz częściej używana do szyfrowania niemieckich wiadomości. Metody wyższej matematyki, które zaadaptował tu Rejewski, a później - konstrukcja bomby kryptologicznej i tzw. płacht Zygalskiego pozwoliła Polakom, jako pierwszym na świecie, na odczytywanie niemieckich depesz szyfrowanych Enigmą. Gdy jednak Niemcy ponownie zmodyfikowali maszynę (zwiększając liczbę zamienianych liter na przełącznicy kablowej), zmuszając polski wywiad do konstrukcji 60 nowych bomb i płacht, co przekraczało piętnastokrotnie jego budżet, zrozumiano, że tajemnica odszyfrowywania niemieckich depesz musi zostać ujawniona innym państwom. 26 lipca 1939 roku w Pyrach metody dekryptażu zostały przedstawione członkom brytyjskiego i francuskiego wywiadu (co ciekawe, używanym w trakcie spotkania językiem był niemiecki, jako jedyny język znany wszystkim trzem stronom). Wielu historyków uważa, że gdyby nie Polacy, szyfry Enigmy zostałyby złamane najwcześniej około roku 1941, kiedy to aliantom udało się przechwycić księgę z kluczami i działającą Enigmę. Niezależnie od wszystkiego, rola Polaków w złamaniu tych szyfrów - a co za tym idzie, w wygraniu wojny - jest niepodważalna.

Jerzy Różycki

Teraz, gdy wiemy już co nieco o osiągnięciach trzech geniuszy, przyjrzyjmy się nim samym. Najmłodszy z trójki Jerzy Różycki urodził się niedaleko Kijowa 24 lipca 1909 roku. Studia matematyczne ukończył w Poznaniu w roku 1932 (co ciekawe, ukończył potem jeszcze geografię). W samej Drużynie Enigma zostawił swój ślad, opracowując tzw. metodę zegara, która pozwalała określić, jaki wirnik w maszynie znajdował się całkowicie po prawej stronie (to znaczy, który wirnik obracał się z każdym wpisanym znakiem). W maju 1939 doczekał się syna, Jana Różyckiego, który został członkiem polskiej drużyny szermierczej, z którą wywalczył srebrny medal na olimpiadzie w Tokio w 1964 roku. Niestety, sam matematyk nie doczekał tego tryumfu swego syna, gdyż zginął w 1942 roku w katastrofie statku *Lamoriciere* razem z 222 innymi pasażerami.

H.Zygalski

Henryk Zygalski, urodzony 15 lipca 1908 roku w Poznaniu, jako swój ślad pozostawił płachty Zygalskiego, czyli perforowane arkusze papieru, które pozwoliły Polakom zrekonstruować Enigmę. W późniejszym etapie wojny Niemcy zmodyfikowali swoje sposoby szyfrowania, pozbawiając płachty użyteczności - nie umniejsza to jednak wkładu Zygalskiego w proces rozszyfrowywania niemieckich depesz. Po wojnie pozostał na emigracji w Wielkiej Brytanii, nauczając matematyki. Otrzymał doktorat honoris causa Uniwersytetu Polskiego na Obczyźnie. Zmarł 30 sierpnia 1978 roku i został pochowany w Londynie.

Marian Rejewski, urodzony 16 kwietnia 1905 roku w Bydgoszczy, jest prawdopodobnie najbardziej znanym matematykiem z całej trójki. To on skonstruował cyklometr oraz, co ważniejsze, bombę kryptologiczną, czyli maszynę napędzaną silnikiem elektrycznym, która pozwalała łamać szyfry Enigmy. On również jako pierwszy zastosował metody wyższej matematyki (m. in. równania permutacyjne) do łamania szyfrów, stosując twierdzenie nazwane potem przez pewnego profesora matematyki „twierdzeniem, które wygrało wojnę". Rejewski doszedł do wniosku, że w jego równaniach permutacyjnych jest zbyt wiele niewiadomych, by były one rozwiązywalne - tu z pomocą przyszli mu członkowie francuskiego wywiadu, dostarczając dane, które pozwoliły mu wyeliminować chociaż część z nich. Tak jak Zygalski i Różycki, po wybuchu wojny Rejewski pracował w Rumunii, Francji i Wielkiej Brytanii, jednak - w odróżnieniu od Zygalskiego - po wojnie wrócił do Polski, żony i dwójki dzieci (z których syn w krótkim czasie zmarł na chorobę Heinego-Medina). Służby Bezpieczeństwa PRLu próbowały inwigilować Rejewskiego, na szczęście bezskutecznie. W 1967 roku spisał swe wspomnienia, dotyczące łamania najtajniejszego niemieckiego szyfru, i rękopis ten zdeponował w Wojskowym Instytucie Historycznym. Zmarł 13 lutego 1980 roku.

Pracę trzech matematyków doceniamy dziś wszyscy. W 2000 roku zostali oni pośmiertnie odznaczeni Krzyżem Wielkim Orderu Odrodzenia Polski, a historia Enigmy cieszy się niesłabnącą popularnością, z polskim filmem *Sekret Enigmy* z 1979 roku, czy też amerykańskim *Enigma* z roku 2001 (który jednak wiele wspólnego z prawdą historyczną to nie ma). Co prawda natrafiłem na wywiad z Rejewskim, w którym prowadzący go dziennikarz najbardziej był pod wrażeniem faktu, że Rejewski potrafi w pamięci podnieść 26 do trzeciej potęgi (!) i przemnożyć wynik przez 6 (!!!), ale cóż -

wielu ludzi nie widzi różnicy między "dobrym matematykiem" a „chodzącym kalkulatorem". Podpowiedź - ten pierwszy nie ma ciekłokrystalicznego wyświetlacza.

Niewinny Rosomak

[Zagadki... innych typów]

W dzisiejszych czasach przeżywamy swoisty boom na różnego rodzaju zagadki - nonogramy, slitherlinki, sudoku, kakuro, konnichiwa, arigato i kilka innych japońskich słów. Ich cechą charakterystyczną jest to, że - teoretycznie - do ich rozwiązania nie jest nigdzie potrzebne zgadywanie, jesteśmy w stanie od a do z rozwiązać je przy pomocy precyzyjnego, łatwego do wyjaśnienia toku rozumowania dedukcyjnego. Mamy pewne przesłanki (reguły gry i dane początkowe) i z nich wnioskujemy całą resztę.

Oczywiście, gdyby cała logika stała tylko czymś takim, to nie byłaby zbyt ciekawa. Na naszych warsztatach *Zagadki logiczne* na pewno odkryjecie kilka innych typów zagadek, które zajmą Was na czas jakiś. My chcieliśmy tutaj zaprezentować kilka innych rodzajów łamigłówek, mających mniej lub więcej wspólnego z 'zagadkami logicznymi', które znamy z życia codziennego.

Pierwszy typ zagadki to tzw. zagadki indukcyjne. Są to zagadki, do rozwiązania których potrzebny jest element 'wspólnej wiedzy'. Najprościej wyjaśnić to na przykładzie. Wyobraźmy sobie, że w pewnym mieście każda kobieta wie o każdym mężczyźnie, który nie jest jej mężem, czy jest on wierny swej żonie, czy nie - nie wie jednak tego o swoim mężu. Dodatkowo mieszkańcy są na tyle dyskretni, że nikt na pewno się o niczyjej niewierności nie dowie na podstawie plotek czy pogłosek. Pewnego dnia pani burmistrz tego miasta ogłasza, że w mieście istnieje przynajmniej jeden niewierny mąż i każda żona, która dowie się o niewierności swego męża, winna w dniu, w którym się o tym dowiedziała, równo o północy go zastrzelić. Pistolety są na tyle głośne, że są słyszalne w całym mieście. Burmistrz zapewnia, że poinformuje miasto, gdy w mieście nie będzie już niewiernych mężczyzn. Po kilku dniach były zasłyszane strzały i o poranku pani burmistrz ogłosiła, że miasto zostało oczyszczone z niewiernych mężów. Jak to możliwe?

By prześledzić to rozumowanie, najprościej najpierw założyć, że istnieje tylko jeden niewierny mąż, a potem to uogólniać (jeśli jest Ci, Czytelniku, znana zasada indukcji matematycznej, to takie rozumowanie na pewno wyda Ci się dość naturalne). Otóż jeśli jest tylko jeden niewierny mąż, to jego żona wie o tym, że wszyscy pozostali mężczyźni są wierni swym żonom, a - na podstawie słów pani burmistrz - wie też, że przynajmniej jeden mężczyzna w mieście jest niewierny. Stąd już natychmiastowy wniosek, że niewiernym jest jej własny małżonek, i pierwszej nocy rozlega się strzał.

Teraz, gdyby niewiernych było dwóch, to ich żony wiedzą o istnieniu tego drugiego. Gdy jednak pierwszej nocy nie pada strzał, żony myślą sobie: 'Hm, gdyby tamten mężczyzna był jedynym niewiernym, to na podstawie powyższego rozumowania tej nocy powinien był rozlec się strzał! Ale strzału nie było, co oznacza, że ta kobieta wie o jeszcze jakimś niewiernym mężu. Ja nie wiem o żadnym innym, czyli ten drugi niewierny to musi być mój własny małżonek!' I drugiej nocy rozlegają się dwa strzały.

Widać już, do czego to zmierza. Gdy jest n niewiernych mężczyzn, n-tej nocy rozlega się n strzałów. Rozumowanie „Skoro pozostali uczestnicy zagadki nie zrobili czegoś na $n-1$ etapie..." jest właśnie rozumowaniem opartym na „wspólnej wiedzy" - teoretycznie w czasie trwania zagadki żony nie dowiadują się niczego nowego, a swe wnioski wyciągają jedynie na podstawie tego, co już wiedzą. I co wiedzą, że inne żony wiedzą. Można by się zastanowić, co by było, gdyby jakiś chytry mąż chciał tu zmanipulować wynikami w myśl zasady „Wiem, że wiecie, że ja wiem, że wy wiecie, że ja się domyślam, że ona wie, że ja wiem, to co wiem. Ale wy nie wiecie, że ja wiem, że wy wiecie, że ja wiem. Ja to wiem"... Kto wie, może kiedyś powstanie epicki kryminał „Hercules Poirot i rozumowanie indukcyjne". Póki co jednak, polecam zastanowić się nad analogiczną zagadką indukcyjną, znaną pod nazwą „Alicja na Konferencji Logików":

Zagadka 1. Na Sekretnej Konferencji Logików, Mistrz Logików włożył każdemu uczestnikowi na głowę jednokolorową chustę, tak, aby każdy mógł zobaczyć chustę każdego innego, ale nie swoją. Chusty były w wielu przeróżnych kolorach. Wszyscy Logicy usiedli w kole, i Mistrz Logików pouczył ich, że w regularnych odstępach czasu w lesie rozlegnie się dzwonek: każdy Logik, gdy już będzie pewien koloru swojej własnej chusty, miał na dźwięk następnego dzwonka opuścić polanę. Każdy, kto opuściłby polanę w złym momencie, w oczywisty sposób nie był prawdziwym Logikiem, ale ohydnym szpiegiem i zostałby wyrzucony z Konferencji. Mistrz jednak pocieszył Logików, że zagadka na pewno dla nikogo nie okazałaby się niemożliwa. I rzeczywiście, Logicy poradzili z nią sobie wyśmienicie. W jaki sposób?

Następnym typem zagadek są 'zagadki samoodnoszące' (tak, właśnie wymyśliłem tę nazwę). Zastanówmy się otóż nad zdaniem: „To zdanie ma pięć wyrazów". Ma? No ma, jak nic. Ono samo mówi o swojej własnej strukturze. Odnosi się do siebie. Jest samoodnoszące. Ależ ja wymyślam genialne nazwy, czyż nie? Można więc wymyślać zagadki 'Uzupełnij poniższe zdanie tak, by było samoodnoszące'. Albo dawać testy zamknięte, w których odpowiedzi na pytania odnoszą się do pozostałych pytań... Proste? Niby tak, ale rozważmy przykład: 'W tym zdaniu liczba 'jeden' występuje .... raz(y).' - co wpisać w miejsce kropek? W zdaniu liczba 'jeden' występuje jeden raz, więc wpisujemy w miejsce kropek 'jeden'... i klops, bo już ta liczba występuje dwa razy. Przy tworzeniu zdań (i zagadek) samoodnoszących trzeba być bardzo ostrożnym. Osobnym problemem jest, na przykład, napisanie programu, który wyświetla własny kod źródłowy, czy wzoru matematycznego, który na płaszczyźnie opisuje sam siebie - można o tym przeczytać w archiwach gazetki [MACIERZATOR.] No ale rozwiążmy jakąś zagadkę samoodnoszącą, żebyśmy nie byli gołosłowni. Weźmy takie trzy pytania (odpowiedzi należy wstawić w miejsce kropek):

1. Wśród pytań 1-3 są ..., których odpowiedź jest mniejsza od 2;
   A)0 B)1 C)2 D)3

2. Wśród pytań 1-3 są ..., których odpowiedź jest większa od 2;
   A)0 B)1 C)2 D)3

3. Wśród pytań 1-3 są ..., których odpowiedź jest równa 2;
   A)0 B)1 C)2 D)3

Pytanie trzecie daje nam najmniej informacji o pozostałych, więc nie opłaca się rozpoczynać rozumowania od niego. Wystartujmy od pytania pierwszego. Zauważmy, że 0 nie może być odpowiedzią na nie, bo wtedy już mielibyśmy jedną odpowiedź mniejszą od 2, więc nasz 'system' pytań nie byłby samoodnoszący. Zastanówmy się, co by było, gdyby odpowiedź brzmiała '1'. Wtedy właśnie ta jedyna 'odpowiedź mniejsza od 2' by nam właśnie tu wystąpiła, tak więc w pytaniu drugim odpowiedzią musiałoby być '2'(bo 3 już by było niemożliwe, skoro w pytaniu pierwszym mamy odpowiedź mniejszą od 2), i mielibyśmy sprzeczność, bo nie mielibyśmy już dwóch możliwych pytań, w których odpowiedź mogłaby być większa od 2 (żeby spełnić warunek z pytania drugiego). Lecimy dalej. Od razu widać, że odpowiedź na pytanie pierwsze nie może być równa 3 (dlaczego?). Co by było, gdyby odpowiedź na pytanie pierwsze brzmiała '2' (to już ostatnia możliwa opcja)? Wtedy odpowiedzi na pytanie drugie i trzecie to 0 lub 1 (bo muszą one być mniejsze od 2) i wystarczy się chwilę zastanowić, by na drugie pytanie odpowiedzieć '0', a na trzecie '1'. Ostatecznie mamy więc 1 - C), 2 - A), 3 - B) i widać, że to rozwiązanie jest jedyne. Ot, proste ;)

Zagadka do przemyślenia:

Zagadka 2. 1. Wśród pytań 1-5 są ..., których odpowiedź jest równa 0;
A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

2. Wśród pytań 1-5 są ..., których odpowiedź jest równa 1;
A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

3. Wśród pytań 1-5 są ..., których odpowiedź jest równa 2;
A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

4. Wśród pytań 1-5 są ..., których odpowiedź jest równa 3;
A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

5. Wśród pytań 1-5 są ..., których odpowiedź jest równa 4;
A)0 B)1 C)2 D)3 E)4

(podpowiedź: powyżej zaprezentowane rozumowanie nie jest wcale najkrótszym czy najprostszym, według jakiego można takie zagadki rozgryźć ;))

Ostatnim typem zagadek są tzw. zagadki lateralne. Pojęcie 'myślenia lateralnego' wprowadził Edward Bono, stawiając je niejako w opozycji dla zwyczajowego, logicznego rozumowania 'krok po kroku'. Kluczem do zagadek lateralnych jest spojrzenie na nie 'od innej strony', innej niż ta, którą podsuwa nam sama treść zagadki. Bardzo znana zagadka lateralna brzmi następująco:

Zagadka 3. Pewien facet jest ubrany całkowicie na czarno. Ma czarne buty, skarpetki, spodnie, sweter, rękawiczki i kominiarkę. Idzie czarną ulicą, na której nie świeci się żadna latarnia. Nie widać też księżyca - jest nów, a niebo zachmurzone. Naprzeciw niego z dużą prędkością jedzie czarny samochód z wyłączonymi światłami - jednak w jakiś sposób kierowca zobaczył mężczyznę i się zatrzymał. Jak to możliwe?

Odpowiedź brzmi: był dzień (nigdzie nie jest napisane, że była noc). To jest przykład zagadki lateralnej, która ma 'niestandardowe' rozwiązanie (trzeba spojrzeć z pewnym dystansem na zagadkę, żeby na nie wpaść), ale jesteśmy w stanie w nie uwierzyć, przyjąć za jasne, proste i logiczne. Ale potem są takie zagadki:

Zagadka 4. Niewidomy wszedł do nadmorskiej restauracji i zamówił pieczeń z pelikana. Kelner podał mu pieczeń, a facet po pierwszym kęsie wybiegł z restauracji i popełnił samobójstwo. Dlaczego?

Rozwiązania? W kwadrans można ich wymyślić siedemdziesiąt. Ulubionym daniem faceta było mięso pelikana, zamierzał popełnić samobójstwo, ale chciał jeszcze poczuć ten smak przed śmiercią. Mięso pelikana było tak ohydne (lub zatrute), że facet wolał się zastrzelić niż jeść to dalej. To wszystko było szyfrem jakiejś dziwnej, ekstremistycznej szpiegowskiej agencji. Facet był kompletnym świrem. No nie wiem. Cokolwiek. A jakie jest 'oficjalne' rozwiązanie? Uwaga - nie zmyślam - brzmi ono tak: *Był marynarzem. Na statku wybuchł pożar w wyniku którego oślepł, a statek zatonął. Uratowali się tylko trzej marynarze: on, jego przyjaciel (ciężko ranny) i jeszcze jeden. Niestety wylądowali na bezludnej wyspie bez żadnej żywności. By nie umrzeć z głodu zdrowy marynarz zabił ciężko rannego i zjadł karmiąc też niewidomego. Powiedział niewidomemu że to mięso z pelikana ...*

Ooo-keeeej. Tak. Jest to zdecydowanie logiczne wyjaśnienie, na które można wpa... CO?! KTO PRZY ZDROWYCH ZMYSŁACH MIAŁBY WYMYŚLIĆ COŚ TAKIEGO? PRZECIEŻ TO JEST BARDZIEJ ABSURDALNE NIŻ PROPOZYCJE, KTÓRE PODAŁ MÓJ CZTEROLETNI SIOSTRZENIEC! I tu właśnie dochodzimy do 'prawdziwej' twarzy zagadek lateralnych. Otóż czasami w zagadce lateralnej chodzi o odgadnięcie dłuższego toku rozumowania, dłuższej opowieści - wtedy to zamieszczanie takiej zagadki w gazecie (takiej jak ta) zupełnie traci sens, a raczej powinno się ją zadawać z klauzulą, że uczestnicy mogą zadawać prowadzącemu pytania Tak/Nie, które pozwolą trochę rozjaśnić sytuację. I z drugą klauzulą, że rozwiązanie *jest* dłuższą opowieścią, którą uczestnicy mają wymyślić. Dokładnie tak, jak ma na myśli prowadzący. I Wy narzekacie na klucze maturalne, że 'narzucają jedną interpretację'? Ha, tu więc mamy przerośniętą i zmutowaną tego wersję.

Jak widać, zagadki są różne, można je lubić bardziej lub mniej (marynarzem, pff!). Dzisiejszy wieczór niech więc stanie się dla Was doskonałą okazją do poznania zagadek, których dotąd nie znaliście, i - oby - wyjścia ze starcia z podniesionym czołem, parującą mózgownicą i kolejną rozwiązaną zagadką na koncie. Czego serdecznie życzy -

Niewinny Rosomak

[Z życia naukowców]

Albert Einstein (1879 - 1955) przez jakiś czas mieszkał w Pradze naprzeciwko zakładu psychiatrycznego, do którego przylegał duży park ogrodzony wysokim murem. Gdy pewnego razu odwiedzał go inny znany fizyk, zadał mu pytanie, co on tak ogląda przez okno. Einstein odparł:
- *Obserwuję ten park, spacerują po nim sami spokojni i szczęśliwi ludzie.*

Wolfgang Pauli (1900-1958) znany był ze swojego przesadnego krytycyzmu. Jeden z jego doktorantów wspominał: *Pracować dla Pauliego to było cudowne. Można go było pytać o wszystko i nie bać się, że uzna jakieś pytanie za głupie. Pauli wszystkie pytania uznawał za głupie.*

Maria Skłodowska-Curie (1867-1934) była bardzo skromną, pracowitą i porządną kobietą. Podczas spotkania z drugim prezydentem Polski Stanisławem Wojciechowskim, Prezydent zapytał:
- *Czy pamięta Pani jasiek, który mi pożyczyła na drogę, gdy jechałem z Paryża do Warszawy?*
- *Pamiętam nawet, że pan mi go zapomniał zwrócić.* – odpowiedziała uczona.

Karl Schwarzschild (1873 – 1916) był człowiekiem bardzo roztargnionym. Świadczy o tym zabawna historia opowiadana przez Maxa Borna. W pewnej restauracji w Getyndze młodzi profesorowie i wykładowcy uniwersytetu zwykli się zbierać na lunch. Schwarzschild był jej stałym bywalcem aż do czasu swego małżeństwa. Parę tygodni po ślubie pojawił się jednak niespodziewanie przy stoliku i wdał się w dyskusję z kolegami. Po jakimś czasie jeden z obecnych zapytał:
- *Jak się panu podoba życie człowieka żonatego?*
Schwarzschild złapał się za głowę, zarumienił się i z okrzykiem:
- *Życie człowieka żonatego, ojej, zupełnie zapomniałem!* – Wybiegł z restauracji.

Norbert Wiener (1894-1964) tłumaczył kiedyś studentom teorię prawdopodobieństwa i chcąc przybliżyć im pojęcie „znikomej szansy” powiedział:
- *Jest to coś równie mało prawdopodobnego jak to, by stado małp, stukając na chybił trafił w klawisze maszyny do pisania, napisało wszystkie tomy Encyklopedii Britannica.*
Zapadła cisza, w której z końca sali dała się słyszeć czyjaś uwaga:
- *Ale przecież raz to się właśnie wydarzyło.*

Niewinny Rosomak

[Stopka redakcyjna]

Redakcja: Mateusz Jurczyński (redaktor naczelny),
Szymon Draga, Michał Stolorz, Joanna Zwierzyńska

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:
macierzator@knm.katowice.pl

wrzesień 2010

[ŚLĄSKA NOC NAUKOWCÓW]

W INSTYTUCIE MATEMATYKI UNIWERSYTETU ŚLĄSKIEGO
W KATOWICACH

WYKŁADY

Miejsce: Aula Kopernika (sala 213) w Instytucie Matematyki UŚ

- **17.00-18.00 mgr Łukasz Dawidowski:** *Jak liczyli nasi rodzice, dziadkowie?*
- **18.00-18.30 dr Żywilla Fechner:** *Jak można zmierzyć ryzyko?*
- **18.30-19.00 mgr Grzegorz Bartosz:** *O pewnym problemie rekurencyjnym.*
- **19.25-20.15 prof. Maciej Sablik, Dziekan Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii UŚ:** *Finansowa piramida, czyli jak obronić swoje pieniądze.*

WARSZTATY

- **17.00-22.00 Piotr Idzik, Mateusz Jurczyński:** *Fraktale* (rozpoczęcie o każdej pełnej godzinie, sala 201),
- **17.00-22.00 Jolanta Marzec, Marek Biedrzycki:** *Szyfrowanie* (rozpoczęcie o każdej pełnej godzinie, sala 429),
- **17.00-22.00 Aleksandra Urban, Rafał Besowski, Anna Jacek, Anita Sendor:** *Zagadki logiczne* (warsztaty o charakterze ciągłym, sala 208),
- **17.00-22.00 mgr Wojciech Bielas oraz Joanna Frej, Beata Łojan i Joanna Zwierzyńska:** *Kawiarnia Szkocka* (warsztaty o charakterze ciągłym, sala 209).