[MACIERZATOR34]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Wesołych Świąt Bożego Narodzenia i dobrego roku 2011

życzy redakcja

[Impresje olimpijskie]

Prawdopodobnie najtrudniejsze zadanie w historii USAMO

Rozpoczynamy na łamach Macierzatora nowy cykl, w którym zamierzamy zająć się analizą wybranych problemów zaczerpniętych z konkursów i olimpiad matematycznych. Pierwszą część poświęcimy zadaniu niewątpliwie wyjątkowemu, które na swoje szczególne miejsce w historii zasłużyło przede wszystkim swoim niebagatelnym stopniem trudności. Zostało ono zaproponowane przez rumuńskiego matematyka Gheorgitę Zbaganu i wykorzystane jako zadanie z numerem szóstym (który to numer zazwyczaj wzbudza wśród uczestników największe emocje) na *29. Amerykańskiej Olimpiadzie Matematycznej* w 2000 roku. Oto jego treść.

Zadanie. *Niech $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$ będą nieujemnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnić nierówność*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \min\{x_i x_j, y_i y_j\} \leq \sum_{i,j=1}^{n} \min\{x_i y_j, x_j y_i\}.$$

To, jak ocenić trudność danego zadania, jest oczywiście kwestią wysoce subiektywną, niemniej w przypadku zadań konkursowych do dyspozycji mamy przynajmniej jedno rozsądne kryterium – statystykę. Zespoły odpowiedzialne za selekcję zestawu zadań konkursowych często wybierają spośród swoich członków grupę testerów – ludzi, którzy nie znając wcześniej treści problemów podejmują się próby samodzielnego ich rozwiązania. Nic tak dobrze nie utwierdza w przekonaniu o stopniu trudności jak nabyte doświadczenie. Wielokrotnie w historii chociażby Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej zdarzały się propozycje zadań, z którymi owi testerzy mieli nie lada problemy lub nawet takie, których żaden z nich nie był w stanie rozwiązać. Zdarzało się też w takich sytuacjach, że odpowiedni komitet wykazywał się sporą odwagą i niejako na przekór decydował się na umieszczenie problematycznego zadania w oficjalnym zestawie, zgodnie z filozofią „niech się dzieje, co chce". Historia na ogół wskazywała, że tego typu odwaga jest opłacalna; nawet natrudniejsze zadania znajdowały przynajmniej kilku pogromców w postaci wybitnych olimpijczyków. Dla przykładu, najtrudniejsze zadanie w dotychczasowej historii Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej (zadanie nr 5 z 37. edycji) zostało rozwiązane przez 5 spośród 426 uczestników. Ale 5 to jednak nie 0...

Przytoczone powyżej zadanie to bezprecedensowy przypadek w historii Amerykańskiej Olimpiady Matematycznej, a prawdopodobnie też w historii wszelkich krajowych i międzynarodowych olimpiad o wysokim prestiżu – – przypadek zadania, którego nie rozwiązał nikt spośród uczestników. Dosyć dobitnie zostało to zaznaczone jako komentarz po tekście z oficjalnym rozwiązaniem: *No one made any headway with this in the USAMO exam. As an olympiad problem, it is exceptionally (and unreasonably) difficult.*

W tym momencie Czytelnik ma do wyboru dwie opcje: albo zignorować resztę artykułu i oddać się intelektualnej przygodzie, szukając rozstrzygnięcia postawionego problemu, albo też przejść do następnego akapitu, w którym omówimy przepiękne rozwiązanie podane przez Raviego Boppanę z Instytutu Technologii MIT. Która z tych opcji jest bardziej atrakcyjna, trudno rozstrzygnąć. Pierwsza z nich wiąże się jednak z ryzykiem tego, że sfrustrowany i wyczerpany psychicznie Czytelnik powróci do tego miejsca po kilku tygodniach, miesiącach...

Jedną z pierwszych myśli przy próbie podejścia do rozwiązania jest niewątpliwie myśl o zastosowaniu indukcji. Rozwiązanie oficjalne rzeczywiście zawiera dowód indukcyjny, który jednak opiera się na szeregu technicznych i bynajmniej nieoczywistych podstawień, oszacowań oraz na żmudnym rozważaniu kilku przypadków. Rozwiązanie Raviego Boppany jest zupełnie inne. Zaczyna się dość niewinnie.

Lemat. *Dla wszelkich nieujemnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz wszelkich liczb rzeczywistych $t_1, t_2, \ldots, t_n$ zachodzi nierówność*

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_i t_j \cdot \min\{a_i, a_j\} \geq 0.$$

Oznacza to dokładnie tyle, że macierz $(\min\{a_i, a_j\})_{1 \leq i,j \leq n}$ jest nieujemnie określona. Próby zastosowania metod algebraicznych, takich jak szukanie wartości własnych, byłyby jednak w tym przypadku dość desperackie. Zamiast tego lepiej skorzystać z analitycznego wzoru na minimum, w którym mamy rozdzielone zmienne, a dokładniej – z przedstawienia minimum w postaci... całki. Dla dowolnych liczb nieujemnych a, b mamy przecież

$$\min\{a, b\} = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,a]}(x) \cdot \mathbf{1}_{[0,b]}(x)\, dx,$$

gdzie $\mathbf{1}_A$ oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A. Chwila refleksji pozwala nie tylko przekonać się do powyższego wzoru, ale też zauważyć, że w magiczny sposób zamieniliśmy właśnie operację min na operację mnożenia, co pozwala dokonać następującego, nie mniej magicznego, oszacowania:

$$\sum_{i,j=1}^{n} t_i t_j \cdot \min\{a_i, a_j\} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_0^\infty t_i \mathbf{1}_{[0,a_i]}(x) \cdot t_j \mathbf{1}_{[0,a_j]}(x)\, dx =$$
$$= \int_0^\infty \Big(\sum_{i=1}^{n} t_i \mathbf{1}_{[0,a_i]}(x) \Big)^2 dx \geq 0.$$

Lemat został udowodniony. Jeżeli Czytelnik skojarzył to oszacowanie z dowodem nieujemnej określoności macierzy kowariancji zmiennych losowych, to skojarzenie jest jak najbardziej trafne; metoda dowodu tego faktu jest w istocie taka sama jak ta zaprezentowana powyżej.

W pomyśle Raviego Boppany najbardziej zadziwiające jest to, że, dysponując udowodnionym właśnie lematem, wystarczy napisać jeszcze aż jedną linijkę, aby całkowicie zakończyć rozwiązanie. Zanim to jednak zrobimy, spójrzmy, czego nam potrzeba. Porównując żądaną nierówność z nierównością wypowiedzianą w lemacie, widzimy, że korzystnie będzie przepisać tę pierwszą w postaci

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \cdot \big(\min\{a_i, a_j\} - \min\{1, a_i a_j\}\big) \geq 0,$$

gdzie $a_i = y_i/x_i$ dla $1 \leq i \leq n$. Oczywiście nie wolno nam tego zrobić, jeżeli któraś z liczb x_i jest zerem. Ten przypadek nie jest jednak specjalnym powodem do zmartwień; jeżeli uda się pokazać tezę dla dodatnich liczb $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$, to dla liczb nieujemnych będzie ona w oczywisty sposób również spełniona.

Wszystko, co nam pozostaje, to jedynie zapisać wyrażenia pojawiające się powyżej w nawiasie jako coś w rodzaju

$$f(a_i)f(a_j) \cdot \min\{\varphi(a_i), \varphi(a_j)\},$$

przy czym φ ma być funkcją nieujemną. W takiej sytuacji zastosowanie lematu natychmiast zakończyłoby dowód.

Owa jedna linijka, która całkowicie wystarcza do zakończenia rozwiązania, to pewna tożsamość, która realizuje opisany przez nas plan. Nierzadko w dowodach trudnych nierówności kluczową rolę pełnią właśnie tożsamości. W tym przypadku tożsamość ta jest wyjątkowo... subtelna:

$$(*) \qquad \min\{a, b\} - \min\{1, ab\} = f(a)f(b) \cdot \min\left(\frac{|a-1|}{\min\{1, a\}}, \frac{|b-1|}{\min\{1, b\}}\right),$$

gdzie $f(x) = \operatorname{sgn}(x-1) \cdot \min\{1, x\}$ dla $x > 0$ oraz a, b są dowolnymi liczbami dodatnimi. Taki napis budzić może zarówno zachwyt, jak i głęboki niesmak. W każdym razie trudno wyobrazić sobie matematyka, który na zawołanie serwuje coś takiego. Spróbujmy zatem zastanowić się nad próbą odgadnięcia powyższej tożsamości, wyprowadzenia jej tylko na podstawie postulowanego wzoru postaci

$$(**) \qquad \min\{a, b\} - \min\{1, ab\} = f(a)f(b) \cdot \min\{\varphi(a), \varphi(b)\},$$

z nieujemną funkcją φ.

Rozważania, które przeprowadzimy, będą w sporej mierze heurystyczne. Postawiliśmy się bowiem w takiej oto sytuacji, w której zależy nam jedynie na znalezieniu rozumowania prowadzącego do odkrycia formuły $(*)$, bez konieczności formalnego rozstrzygania o istnieniu bądź nieistnieniu innych realizacji postulowanego równania $(**)$.

Przyjmując we wzorze $(**)$ nierówności $a \geq b \geq 1$, otrzymujemy

$$b - 1 = f(a)f(b) \cdot \min\{\varphi(a), \varphi(b)\}.$$

Natychmiast widzimy, że lewa strona tego równania nie zależy od a, co oznacza, że poprzez zwiększanie parametru a nie zmienimy wartości prawej strony. Efekt ten może być zrealizowany na dwa sposoby:

(i) albo $\min\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ na ogół wynosi $\varphi(a)$ (co może się zdarzyć, gdy funkcja φ jest malejąca) i wówczas zależność czynnika $\varphi(a)$ od a jest anihilowana przez czynnik $f(a)$,

(ii) albo $\min\{\varphi(a), \varphi(b)\}$ na ogół wynosi $\varphi(b)$ (np. gdy φ jest rosnąca) i wtedy czynnik $f(a)$, jako jedyny dopuszczający parametr a, powinien być stały.

Ponieważ druga z tych opcji wydaje się mniej skomplikowana, skupmy się właśnie na niej.

Funkcja f jest stała na przedziale $(1, \infty)$; oznaczmy tę stałą wartość przez c. Weźmy teraz w równaniu $(**)$ dowolne parametry a, b spełniające $b \leq 1 \leq ab$. Otrzymamy $b - 1 = cf(b)\varphi(b)$, skąd

$$\varphi(b) = \frac{b-1}{cf(b)} \quad \text{dla } 0 < b \leq 1.$$

Podstawmy teraz we wzorze $(**)$ $a = b$. Otrzymamy wówczas równości $a - 1 = f(a)^2\varphi(a)$ oraz $a - a^2 = f(a)^2\varphi(a)$ odpowiednio dla $a > 1$ oraz $a \leq 1$. W szczególności,

$$\varphi(b) = \frac{b(1-b)}{f(b)^2} \quad \text{dla } 0 < b \leq 1.$$

Porównując to z uzyskanym wcześniej wzorem na $\varphi(b)$, wnosimy, że $f(b) = -cb$ dla $0 < b \leq 1$. Pamiętając zaś o tym, że $f(b) = c$ dla $b > 1$, natychmiast dostajemy, że

$$f(x) = c \cdot \operatorname{sgn}(x-1) \cdot \min\{1, x\}.$$

Bez problemów wyprowadzamy stąd wzór na funkcję φ oraz wartość parametru $c = 1$. Dysponując tymi wzorami, Czytelnik bez trudu sprawdzi prawdziwość tożsamości $(**)$, czyli *de facto* – tożsamości $(*)$.

Tomasz Kochanek

[Matematyka jak poezja]

z Profesorem Andrzejem Lasotą rozmawia Profesor Tomasz Szarek

Dnia 28 grudnia 2010 miną cztery lata odkąd zgasło Wielkie Światło polskiej matematyki. Profesor dr hab. Andrzej Lasota był postacią szczególną w historii Uniwersytetu Śląskiego – światowej klasy Uczonym, wspaniałym Nauczycielem, życzliwym Człowiekiem. Nie sposób wymienić tu wszystkich dokonań i nagród Pana Profesora; wspomnijmy tylko, że był członkiem honorowym Polskiego Towarzystwa Matematycznego, członkiem czynnym Polskiej Akademii Umiejętności, doktorem honoris causa Uniwersytetu Śląskiego. Był laureatem Medalu im. Władysława Orlicza (2000) i Medalu im. Wacława Sierpińskiego (2002); został uhonorowany Nagrodą Prezesa Rady Ministrów za całokształt pracy naukowej (2004).

Prezentujemy poniżej fragmenty rozmowy Pana Profesora z jednym z Jego uczniów – prof. dr. hab. Tomaszem Szarkiem, specjalistą w dziedzinie asymptotyki procesów Markowa, fraktalnych własności miar niezmienniczych i stochastycznych równań różniczkowych. Wywiad ten ukazał się w 1998 roku na łamach *Przeglądu Powszechnego*. Jego pełny tekst można znaleźć w elektronicznej wersji [MACIERZATORA] na stronie internetowej Koła Naukowego Matematyków UŚ – *www.knm.katowice.pl.*

Redakcja [MACIERZATORA] pragnie złożyć serdeczne podziękowania Panu Profesorowi Tomaszowi Szarkowi oraz Redakcji *Przeglądu Powszechnego* za wyrażenie zgody na wydrukowanie wywiadu.

– Panie Profesorze, rozpowszechniony jest pogląd, że wszystkie dyscypliny wiedzy, poza matematyką, zasługują na miano nauki tylko przez uprzejmość. Co sprawia, że matematyka cieszy się tak uprzywilejowaną pozycją pośród innych nauk?

– Niewątpliwie jest wiele nauk, które nie są matematyczne. Zasadnicza różnica między nimi a matematyką polega na tym, że można w nich drastycznie zmienić poglądy. Otóż w matematyce tak nie jest. Jeśli się porządnie udowodni jakieś twierdzenie, co oznacza, że matematyk przy jego dowodzie się nie pomyli, a kilku jego kolegów matematyków je sprawdzi, to wtedy zasadniczych zmian nie można oczekiwać. Dzieje się tak po prostu dlatego, że matematyka to jest pewien algorytm – sposób postępowania, który, zastosowany poprawnie, musi dać zawsze taki sam rezultat. Tajemnica tkwi w tym, dlaczego musi dać zawsze taki sam rezultat. Ale tajemnica ta jest na tyle trudna, że nie podejmuję się jej rozwiązać. Dlaczego powtarzając rozumowanie, musimy otrzymać ten sam wynik, jeśli prowadzimy je poprawnie? Mnie się wydaje (mogę się jednak mylić), że odpowiada za to konstrukcja świata. Świat jest rzeczywiście tak skontruowany, że wyniki doświadczeń i rozumowań są powtarzalne, przy czym są powtarzalne w sposób absolutny, kiedy rozumujemy zgodnie z przyjętymi od tysiącleci, przynajmniej od Arystotelesa, pewnymi kanonami logiki. Jeżeli prowadzimy rozważania na obiektach matematycznych według dwuwartościowej logiki, to dochodzimy nieustannie do tych samych wniosków. Trzeba także pamiętać, że obiekty matematyczne są w idealny sposób sprecyzowane. Mnie się osobiście wydaje, że dzieje się tak dlatego, iż wszystkie twierdzenia matematyczne można sprowadzić do twierdzeń o liczbach naturalnych. A liczby naturalne mają tę zadziwiającą własność, że wszystkie wykonane na nich rachunki dają ten sam wynik. Oczywiście, to że $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$ jest stosunkowo łatwe do wyobrażenia, lecz pewne obliczenia są naprawdę skomplikowane i każdy kto kiedykolwiek pracował przy jakimkolwiek problemie numerycznym, czy nawet pracował w takim dziale jak księgowość w dużym przedsiębiorstwie i zobaczył, że to wszystko się zgadza, odczuwa wrażenie swoistego cudu. Ten cud się zdarza we wszystkich bankach na świecie tysiące razy dziennie. Tak są skontruowane liczby naturalne. Ponieważ myśląc matematycznie, w gruncie rzeczy działamy w tej pracy logicznej na liczbach naturalnych, więc wyjaśnia to troszeczkę cud powtarzalności rozumowań matematycznych. Wówczas jedynym przyjętym przez nas założeniem pozostaje założenie niesprzeczności aksjomatyki liczb naturalnych – wszystko inne możemy już sprowadzić do tej aksjomatyki.

Można powiedzieć, i takie pojawiały się zdania, że liczby naturalne stworzył Bóg, a wszystko inne jest wymysłem człowieka. Może rzeczywiście tak jest? W każdym razie jest jakaś numeryczna konstrukcja świata, która jest poprawna, a jej poprawność zapewnia poprawność rozumowań matematycznych. To właśnie wyróżnia matematykę spośród wszystkich innych dziedzin.(...)

– *Czy matematycy sięgają po poezję?*

– Jednym z ludzi, którzy wywarli na mnie istotny wpływ i przyczynili się do ukształtowania moich poglądów matematycznych, był Marceli Stark. Wybitny matematyk, który kochał książki, pisał je i pomagał wydawać. To on przyczynił się, a właściwie zadecydował o powstaniu i rozwoju sławnych serii Biblioteki Matematycznej i Monografii Matematycznych. Był to człowiek pod wieloma względami wyjątkowy. Andrzej Turowicz wspomina: Pamiętam, iż kiedy mu powiedziałem, że choć przepadam za poezją dawniejszą, nie rozumiem współczesnej, Stark odpowiedział: „Weź i czytaj Szymborską". Powiedział to w 1974 r. Najlepsze wiersze w życiu poznałem z tomików, które czytał mi Ryszard Engelking, i tych, które podarował mi Zdzisław Opial.

– *Jeśli nasz umysł, będący w końcu tworem materialnym, poznaje struktury matematyczne, które są w nim zakodowane, to skąd pojawia się w matematyce pojęcie nieskończoności?*

– Są pewne rzeczy, na które z kolei ja jestem mało wrażliwy. Zastanawia mnie, że wielu ludzi i to dobrze wykształconych, nie ma tego zdumienia, które miała Szymborska, które spotykamy u Steinhausa. Nie dziwi ich, że oni to właśnie oni, a nie ja. Że każdy z nich jest sobą, a nie swoim ojcem czy bratem, czy Arystotelesem. Na moich oczach zabito Kennedy'ego. Był to dla mojego pokolenia człowiek bardzo ważny, ktoś, z kim wiązaliśmy nadzieje na lepszy, bardziej uporządkowany świat, na jakieś dobre zmiany w tym świecie. Myśmy wszyscy płakali, gdy go zabito, ale nikt z nas w najmniejszym stopniu wówczas nie umarł. Wraz z tą śmiercią nie ubyło w najmniejszym stopniu mojej świadomości, mojej jaźni, niczego ze mnie. Otóż to, dlaczego ja, jestem ja, a Kennedy był Kennedym, jest niewątpliwie wielką zagadką. Do niektórych ludzi to nie dociera, to, co ja mówię, jest dla nich zupełnie niezrozumiałe. Co to za zagadka, ja jestem ja, ty jesteś ty.

Otóż w podobny sposób ja jestem nieczuły na problem nieskończoności, w ogóle nie uważam tego za żaden problem. Mój ulubiony przykład, który często powtarzam, ukazuje nieskończoność jako abstrakcję czegoś, czego jest bardzo dużo. Dzieci tak liczą: jeden, dwa, dużo. Dużo – to po prostu nieskończoność. Nieskończoność jest to tak wielka liczba, że odejmowanie od niej jedynki czy też dodawanie do niej jedynki nic właściwie nie zmienia. Dziecko zdaje sobie z tego sprawę: gdy jest jeden cukierek i ono go weźmie, to mama zobaczy, że zniknął; jeśli jednak jest całe pudełko cukierków i dziecko weźmie jeden, to mama nie zobaczy. Rzeczywistość nie jest matematyką, tych cukierków nie jest nieskończenie wiele i ja się o tym niejednokrotnie w dzieciństwie przekonałem – wybierałem po jednym i w końcu rodzice się zorientowali, że sięgam do pudełka z cukierkami. Zorientowali się dlatego, że matematyka operuje pojęciem nieskończoności, że tak powiem, rzeczywiście nieskończonej, no a pudełko, choć wypełnione po brzegi cukierkami, nie miało ich nieskończenie wiele. Ale miało dużo, więc przez jakiś czas ta sztuczka się udawała.

– *Czy są granice stosowalności matematyki?*

– Niewątpliwie można dzisiaj dostrzec penetrację nowych obszarów ludzkiego poznania przez matematykę. Nie idzie ona gładko. Matematyka została najpierw zaobserowana w astronomii. To poszło łatwo, bo nasz układ słoneczny funkcjonuje niezwykle precyzyjnie i wobec tego niemal natychmiast nadawał się do modelowania matematycznego. Podobnie wiele rzeczy związanych z miernictwem na ziemi. Zastosowanie matematyki i matematyzacja fizyki nastąpiły za czasów Galileusza, no i oczywiście Newtona. Później proces ten przebiegał jak burza, osiągając taki stan, że współczesna fizyka to tak naprawdę pewien zespół równań matematycznych, którym nadajemy pewną treść fizyczną. Bo właściwie: co to jest mechanika kwantowa? To jest pewien zespół równań matematycznych, którym nadajemy interpretację fizykalną. Tutaj doszliśmy do momentu, kiedy obiekty realne zachowują się w sposób idealny. Znacznie trudniej jest, jeśli idzie o penetrację chemii przy zastosowaniu matematyki. Na przykład w chemii dużych cząstek rozwiązania odpowiadających im modeli fizykalnych, które prowadzą do skomplikowanych układów równań typu Schroedingerowskiego, są praktycznie niewykonalne. Na przykład w chemii polimerów widać, że chemicy muszą mieć kolosalne wyczucie, bo nie wszystko można tam policzyć. Chemia się matematyzuje, ale nie tak szybko jak fizyka. Zupełnie inaczej ma się rzecz z biologią. O ile fizyka i chemia opierają się na stosunkowo niewielu zasadniczych prawach, o tyle w biologii takich fundamentalnych praw brak. Innymi słowy, nie można odtworzyć działania układu biologicznego na podstawie kilku ogólnych praw. Wykładałem jakiś czas temu rachunek wariacyjny. Otóż jakikolwiek obiekt fizyczny się weźmie i napisze odpowiadające mu w mechanice klasycznej równanie Lagrange'a, to z tego wyniknie, jakie równanie on spełnia. Równania mogą być bardzo trudne do rozwiązania, mogą być także trudne do interpretowania fizycznego, ale my dysponujemy algorytmem. W mechanice klasycznej jest powiedziane: weź taki a taki funkcjonał, poszukaj jego minimum i to będzie rozwiązanie naszego problemu. Przynajmniej formalnie mamy mechanizm postępowania. Gdy patrzę na mrowisko, nie umiem wskazać praw, które powiedziałyby mi, że to musi być tak a tak, bo spełnione jest to i to. Nie potrafię sobie tego wyobrazić nawet teoretycznie. John Murray z Oxfordu – jeden z nawybitniejszych biomatematyków świata, który wsławił się m.in. matematycznym wytłumaczeniem prążków na skórze krokodyli i tygrysów – uważa, że przejście od materii nieożywionej do związków organicznych funkcjonujących jako żywe istoty jest potężnym skokiem jakościowym. Pojawia się ogromnie wiele możliwości rozwoju i różnicowania, wobec których na razie pozostajemy bezradni. W tym miejscu pojawia się bardzo ciekawy problem filozoficzny, a mianowicie pytanie o redukcjonizm. W dalszym ciągu pojawiają się subtelne rozważania redukcjonistyczne sugerujące np., że wszystkie nasze uczucia to tylko praca neuronów. Ja się z tym nie zgadzam. Uważam, że nie da się odtworzyć umysłu, obserwując prądy i zjawiska biochemiczne zachodzące w mózgu człowieka; jeden z filozofów powiedział, że nie da się odtworzyć smaku czekolady, obserwując reakcje zachodzące w mózgu człowieka jedzącego czekoladę. Można odtworzyć sposób reakcji mózgu na smak czekolady, ale nie odtworzymy w ten sposób samego smaku. Smak to zupełnie coś innego. Właśnie to coś nowego, co opiera się redukcjonizmowi.

Muszę przyznać, że w tym wywiadzie na 90% pytań nie umiem odpowiedzieć, mogę jedynie wyrazić moje stanowisko. A moje stanowisko jest takie, że matematyka jest częścią materialnego świata, jest funkcją materialnego świata. Samo zaś przechodzenie od jednych struktur do drugich jest matematycznie coraz trudniejsze i w biologii zaczyna się właściwie załamywać. Prawa biomatematyki dotyczą pewnych wyizolowanych mechanizmów, np. potrafimy zapisać równania związane z pracą układu krwiotwórczego albo z pracą narządu wzroku. To wszytko potrafimy matematycznie opisać, dlatego że są to pewne procesy wyodrębnione z całości, i to procesy szczególnie podatne na opis matematyczny. Nie można natomiast napisać równania matematycznego opisującego życie uczuciowe. Pewne procesy fizjologiczne, np. zmiany pracy serca, są dość dobrze opisane matematycznie, dysponujemy już niezłymi monografiami dotyczącymi arytmii serca i, co ważniejsze, wspomniane modele matematyczne znajdują uznanie wśród specjalistów – niektórych specjalistów, można bowiem zaobserować wśród lekarzy dużą niechęć do uczenia się matematyki. Z tego, co powyżej powiedziałem, wynika, że są pewne działy biologii czy medycyny znakomicie poddające się modelowaniu matematycznemu, ale ma to właściwie miejsce wtedy, kiedy odchodzimy od tego, czym w istocie jest żywa materia. Modelujemy matematycznie tę część rzeczywistości, która jest niejako mechaniczna. Jak więc widzimy, zastosowania matematyki do biologii i medycyny są użyteczne, ale dotyczą, jeśli tak można powiedzieć, najbardziej materialnej części żywego organizmu, nic nie mówiąc nam o istocie życia, ani tym bardziej o istocie świadomości.(...)

– Wiek XX przyniosł głęboką rewolucję w podstawach matematyki. Mam na myśli grupę twierdzeń potocznie zwanych twierdzeniami limitacyjnymi, a dowiedzionych przez Goedla, Skolema-Loewenheima, Churcha. Czy matematyk w swej pracy jest świadomy ograniczeń, jakie nakładają te twierdzenia?

– Najpierw wyjaśnijmy krótko, o co tutaj chodzi. Dowodząc jakiegoś twierdzenia, matematyk musi przestrzegać pewnych reguł postępowania, podobnie jak szachista poruszający się gońcem może chodzić tylko po przekątnej. Wypowiedzi prawdziwych twierdzeń jest wiele – porównajmy je do całości szachownicy; otóż poruszając się czarnym gońcem nigdy do pewnych pól (białych) nie dojdziemy, ponieważ nie pozwalają na to reguły gry. Kwestie te są pasjonujące dla specjalistów z podstaw matematyki i właściwie każdego matematyka, kiedy o nich myśli. Na ogół jednak, gdy zajmujemy się swoimi problemami, ograniczenia te umykają. To jest coś takiego jak to, iż każdy z nas wie, że będzie musiał umrzeć, ale pracuje, jakby miał żyć wiecznie. Matematycy zapominają o tym, że tak niewiele można dowieść w stosunku do tego, co w matematyce ważne, a co poza możliwościami dowodowymi. Mimo to staramy się walczyć o tę niewielką cząstkę znajdującą się w zasięgu naszych możliwości.

– Panie Profesorze, matematyka podlega ewolucji. Bez wątpienia inny był poziom ścisłości dowodów w Euklidesowych „Elementach”, inny jest we współczesnej matematyce. Myślę, że taką linię demarkacyjną wyznacza osoba Weierstrassa...

– Tak, Weierstrass rzeczywiście dokonał przełomu w naszym rozumieniu: co to jest ścisłość dowodu, zwłaszcza w analizie matematycznej.

– Moje pytanie brzmi następująco: w jakim kierunku będzie ewoluować matematyka? Bo co do tego, że będzie się zmieniać, nie mamy wątpliwości. Czy będzie bardziej ścisła i sformalizowana, czy raczej nacisk będzie w niej położony na intuicję?

– Bardzo ciekawe i ważne pytanie. My nie zajmujemy się matematyką, my tylko próbujemy powiedzieć coś o niej i w związku z tym nie można być tego zupełnie pewnym. Możemy się mylić. Wydaje mi się jednak, że obecne trendy są niedobre. Powstają duże grupy matematyków uprawiających dobrą matematykę, niestety w coraz mniej precyzyjny sposób. Paru moich matematycznych przyjaciół z Warszawy i Torunia odsądzi mnie od czci i wiary, ale ja właśnie o polskiej matematyce nie będę mówił źle. Bo w Polsce mamy jeszcze do czynienia ze starą, dobrą tradycją precyzyjnej matematyki. Ale właśnie w dziedzinie, która się też w Toruniu i Warszawie rozwija, w teorii gładkich układów dynamicznych, spotykamy dużą liczbę twierdzeń sformułowanych i dowiedzionych w sposób, który budzi u innych matematyków poważne zastrzeżenia. Na przykład dowód twierdzenia o ergodyczności modelu gazu doskonałego zaproponowany przez Sinaia zawierał tyle luk, iż jak głosi plotka, napisano wiele rozpraw doktorskich, by je uzupełnić. Zresztą nie wiem dokładnie, jak się ta historia skończyła. Widziałem kiedyś prace pisane przez specjalistów w dziedzinie gładkich układów dynamicznych, a dotyczące układu Lorenza – znanego przykładu naśladującego zjawisko turbulencji – w których podano i udowodniono wiele własności chaotycznych i... te dowody nikogo nie przekonały. Trzeba się pochwalić, że pierwszy precyzyjny dowód istnienia chaotycznych rozwiązań równania Lorenza podali matematycy polscy: M. Mrozek i jego współpracownicy z Krakowa. Co ciekawsze, dowód ten był jednym z pierwszych precyzyjnych, ale wspomaganych komputerowo. Obawiam się, iż będzie się pojawiać coraz więcej niedobrej, nieprecyzyjnej matematyki. Wynika to z dwóch rzeczy: pierwsza sprawa – matematyka jest trudna i robi się tym trudniejsza, im bardziej chcemy ją uprawiać szczegółowo i dokładnie. Sprawdzenie wszystkiego niesłychanie opóźnia nasze postępy. Jeśli pozwolimy sobie na pewną dowolność, to idzie nam to znacznie szybciej. To, o czym mówimy, jest najlepiej widoczne w pracy fizyków. Prace fizyków są prawdopodobnie najmniej precyzyjne ze wszystkich zastosowań matematyki (znowu obawiam się, że niektórzy fizycy śmiertelnie się na mnie obrażą), ale w ten sposób zawierają wyniki, które mi imponują. Mamy ogromny szacunek dla fizyków. Abstrahując od tego, że złą matematykę mogą robić ludzie głupi, żyjący iluzją, że matematykę znają i rozumieją, trzeba stwierdzić, iż znakomici naukowcy, jeśli chcą szybko osiągnąć daleko idące wyniki, nie mogą zwracać uwagi na precyzję. Z punktu widzenia czystego matematyka prace Einsteina nie są rozprawami bez zarzutu. Swoboda stylu miesza się w nich z głębią obserwacji. Oczywiście, okazało się, że można wiele rzeczy sformalizować; dla szczególnej teorii względności można podać aksjomatykę i w rzeczywistości wiele takich aksjomatyk podano. Nawiasem mówiąc, nie pchnęło to w ogóle teorii względności do przodu i raczej postęp jest czysto estetyczny. Otóż, chcąc stosować matematykę, naukowcy niematematycy są zmuszeni robić to – nazwijmy to umownie – byle jak. Inny klasyczny przykład to R. Feynman. Liczył on całki w przestrzeniach funkcyjnych (zwane dziś całkami Feynmana) w sposób, który każdego matematyka musi doprowadzić do rozpaczy. Ale on je liczył i nawet dostał Nagrodę Nobla, wyjaśniając pewne fakty z zakresu mechaniki kwantowej. Matematycy, siedząc dziesiątki lat, próbują policzyć to poprawnie; powstają z tego grube, wielotomowe dzieła, których przestudiowanie w ciągu jednego życia jest niemożliwością. Gdyby Feynman w ten sposób chciał budować teorię całki, brakłoby mu czasu na rozważanie zagadnień mechaniki kwantowej. Więc to jest jeden powód. Drugi jest taki, że układy dynamiczne, o których tu mówimy, są tak skomplikowane, że w gruncie rzeczy są bardziej fizykalne niż matematyczne. W związku z tym ludzie pracujący w teorii gładkich układów dynamicznych często pozwalają sobie na pewien sposób rozumowania zbliżony raczej do rozumowania fizyków. Właściwie gdy się czyta książki Sinaia i Arnolda, to często ma się wrażenie, że się słucha bardzo dobrego fizyka, bardzo zmatematyzowanego fizyka. Próbowałem dawać do czytania studentom niższych lat matematyki książki Arnolda z równań różniczkowych i muszę przyznać, że było to bardzo demoralizujące. Arnold pisze w sposób tak luźny, że trzeba być naprawdę dobrym matematykiem, żeby zbudować pomiędzy dwoma zdaniami poprawne przejście logiczne. Czasami może się to nawet nie udać. Z drugiej strony niejeden specjalista z równań różniczkowych dopiero z książki Arnolda może zrozumieć, czym się naprawdę zajmuje.

– *Einstein powiedział kiedyś, że matematycy wiedzą dużo, ale nigdy to, o co ich pytają fizycy. Tak więc ze strony fizyków również pojawiają sie zarzuty, że matematyka nie spełnia ich oczekiwań.*

– Oczywiście. Nie chcę użyć trywialnego porównania, ale niektóre kobiety prowadzą mieszkanie w taki sposób, że jest ono bardzo uporządkowane, tylko żyć się w nim nie da. Otóż matematycy robią coś takiego ze swoją nauką – ona jest bardzo porządna, tylko niestety czasami już się do niczego nie nadaje.

– *Panie Profesorze...*

– Jeśli można, chciałbym powrócić do poprzedniego zagadnienia. Mówiliśmy o dobrej stronie odejścia od ścisłości. Dopóki świat będzie tak postępował, że w czołówce będą szli ludzie, którzy postępują nieprecyzyjnie, a za nimi podążać będą ci, którzy dokonają formalizacji, to wszystko w porządku. Mówi się, że XX w. jest wiekiem biologii, broni atomowej i czegoś tam jeszcze, każdy może coś tutaj dodać. Według mnie jest to również wiek hochsztaplerstwa w nauce, a w szczególności w matematyce; powstaje takie mnóstwo głupich, nieciekawych i nieważnych twierdzeń i całe tomy niepotrzebnych rozważań, napisanych w dodatku w sposób nieprecyzyjny, że człowieka ogarnia przerażenie. Właściwie nie wymyślono idealnego systemu kontroli i przerażająca jest myśl, że np. na język polski przekładane są za drogie pieniądze książki, które są stekiem nonsensów, natomiast wspaniałe pozycje nie są tłumaczone. To jest tragedia, tragedia hochsztaplerstwa w nauce. Jest ono tak duże, że tracimy nad nim kontrolę. I, o zgrozo, to się dzieje także w matematyce. Podkreślam, nie chodzi tu tylko o brak ścisłości. To wspaniałe, że Einstein i Feynman nie byli niewolnikami rygorystycznej precyzji i mogli dzięki temu dokonać rzeczy wielkich. Nie jest też tragedią, że Arnold i Sinai w teorii gładkich układów dynamicznych nie zatrzymali się nad jakimiś szczegółami. Oni poodkrywali tak piękne twierdzenia, stworzyli od podstaw całe gałęzie nauki i otworzyli nam oczy na nowe interesujące własności. Gdyby robili to z Weierstrassowską skrupulatnością, to prawdopodobnie do niczego nowego by nie doszli. Wydaje mi się, że takim typowym przykładem hochsztaplerstwa jest tzw. synergetyka. Całe opasłe tomy poświęcone synergetyce zostały wydane przez jedno z najbardziej prestiżowych wydawnictw naukowych, Springer Verlag. Nie ma tam nic nowego matematycznie, tylko stwierdzenia dobrze już znane i niedbale przedstawione. Smutne to jest, że najbardziej prestiżowe wydawnictwo świata wydaje za ciężkie pieniądze książki bez żadnej wartości.

– Czy w matematyce nastąpi unifikacja pozornie odległych dziedzin, tak jak się to dokonało z algebrą i topologią w topologii algebraicznej?

– Tak, stale będzie się dokonywał postęp w unifikacji, ale będzie on znacznie wolniejszy niż postęp w dyferencjacji. Niestety, w matematyce, jak i w medycynie, jesteśmy coraz bardziej na to skazani.

– G. H. Hardy w swoich badaniach naukowych programowo wybierał kwestie pozbawione możliwości jakiegokolwiek zastosowania praktycznego. Pan Profesor postępuje odwrotnie, tzn. zastosowania wyznaczają obszar Pańskich zainteresowań: biologia, medycyna. Dlaczego? Czy wiąże się to z Pańskim poglądem na matematykę i jej związek z rzeczywistym światem?

– Tutaj wiążą się dwie rzeczy. Po pierwsze Hardy był człowiekiem bardzo kontrowersyjnym. Także ten jego pogląd – cytując bpa Pieronka wypowiadającego się w sprawie pewnego księdza – to problem psychiatry, nie matematyka. Ale jest jeszcze druga kwestia. Naprawdę wielkie zastosowania matematyki, takie jakie robili Einstein, Smoluchowski, specjaliści od mechaniki kwantowej czy fizyki atomowej, są niesłychanie rzadkie. To samo dotyczy zastosowań w biologii czy medycynie – można znaleźć w neurologii kilka prac matematycznych, które zapisały się na trwałe w historii zastosowań matematyki. Natomiast złe zastosowania jest bardzo łatwo tworzyć. Są uniwersytety w Stanach Zjednoczonych, na których w ogóle zlikwidowano matematykę. Rozmawiałem z przyjaciółmi matematykami we Włoszech i okazuje się, że tam panuje podobny pogląd. Moim zdaniem wynika to z tego, że wielu ludzi produkuje śmieci, pośród których giną rzeczy naprawdę wartościowe. Ale niestety nie sposób a priori określić, co jest śmieciem, a co nim nie jest. Dopiero przyszłość bezbłędnie pokazuje, które rezultaty są wartościowe. Mówiąc krócej, największym źródłem naszych nieszczęść jest pośpiech. Nauka w tym względzie nie jest wyjątkiem. Podobnie jest w literaturze i filmie.

– Powiedzmy teraz o Pańskiej współpracy z panią doc. Marią Ważewską-Czyżewską. Czego ta współpraca dotyczyła, jakie wynikły z niej praktyczne zastosowania matematyki w medycynie?

– Ważewska była niezwykle uczciwym naukowcem. Miała ogromną wiedzę hematologiczną i zdawała sobie przy tym sprawę, że niektóre mechanizmy w hematologii można będzie opisać matematycznie. W pewnym momencie brakło jej narzędzi matematycznych i ona mi o tym sprawach opowiedziała. A mnie się to po nocach śniło. Po jakimś czasie zaproponowałem jej kilka modeli i ona wybrała z tych moich pomysłów to, co uważała za biologicznie najciekawsze, doprowadzając mnie zresztą niejednokrotnie do rozpaczy, bo przez tę jej uczciwość modele bardzo piękne, a tylko trochę załgane, musieliśmy odrzucić. Otóż, cośmy w rezultacie zbudowali? Zbudowaliśmy model, który w języku matematyki nazywa się nieliniowym równaniem różniczkowym z opóźnionym argumentem. Ma on pewne własności wymykające się, a nawet, zdawałoby się, urągające zdrowemu rozsądkowi. W tym przypadku, jak mawiał Opial, matematyka jest mądrzejsza od matematyka.

W porównaniu z innymi systemami układ krwiotwórczy działa bowiem stosunkowo prosto i pierwszy doczekał się matematycznych prób opisu. Krwinki są produkowane w szpiku kostnym i po przekroczeniu bariery szpikowej dostają się do krwioobiegu. Tam wypełniają swoje funkcje (np. czerwone transportują tlen), nie rozmnażają się i po wyczerpaniu rezerw enzymatycznych są wchłaniane przez ustrój. Mamy tu więc wyraźnie wyróżnione dwie fazy: okres produkcji (rozmnażania się) w szpiku kostnym i okres funkcjonowania w krwioobiegu. Między tymi fazami istnieje ścisłe sprzężenie. Jeśli w krwioobiegu krwinek jest zbyt mało, produkcja układu krwiotwórczego wzrasta; jeśli jest ich zbyt dużo – maleje. Układ krwiotwórczy reaguje jednak z niewielkim opóźnieniem, jednego do trzech dni. W sumie mamy więc sytuację, która może być dobrze opisana przez równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem. Możemy więc do układu krwiotwóczego zastosować naszą teorię i zaobserwować, co się dzieje przy schorzeniach wydłużających czas reprodukcji krwinek. Zgodnie z naszą teorią powinny się pojawiać oscylacje poziomu krwinek, początkowo regularne, potem chaotyczne. Wreszcie może nastąpić przekroczenie granicy tolerancji ustroju. Krzywe śmiertelności powinny być wykładnicze. Zgadza się to dość dokładnie z rzeczywistym przebiegiem niektórych białaczek.

Mając model procesu, można nim sterować. Próby takie udały się Ważewskiej. Docent Ważewska, wykorzystując do planowanej terapii rozwiązania badanego przez nas równania różniczkowego, pomogła w istotny sposób kilku pacjentom z anemią polekową.

Jeżeli nawet w minimalnym stopniu moja praca się do tego przyczyniła, to może jest to najwartościowsza rzecz, jaką w życiu zrobiłem.

marzec 1998

[Liga Matematyczna - część 3.]

Witamy w trzeciej odsłonie Ligi Matematycznej! Tematem grudniowej edycji są sofizmaty. Z racji dosyć długich sformułowań problemów, tym razem pominiemy omówienie poprzedniej części. Zaznaczymy jedynie, że niektóre z zadań z listopadowej odsłony zostały zaczerpnięte z książki Wacława Marzantowicza i Piotra Zarzyckiego *Elementarna teoria liczb*. Po drugiej części konkursu najlepszy wynik punktowy ma Adam Glos (3 klasa liceum) – 69 punktów (na 100 możliwych). Gratulujemy!

Polecenie do każdego zadania jest takie samo – należy wyjaśnić, dlaczego rozumowanie jest błędne.

Zadanie 1. Udowodnimy, że $0 = 1$.

Z twierdzenia o całkowaniu przez części:

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{x}x - \int \frac{-1}{x^2}x\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x,$$

po przeniesieniu całki z $\frac{1}{x}$ na lewą stronę:

$$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1,$$

a zatem: $0 = 1$.

Zadanie 2. Pokażemy, że wszystkie koty są tego samego koloru.

Dowód indukcyjny: Dla jednoelelementowego zbioru kotów teza jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy, że dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ teza jest prawdziwa. Rozważmy zbiór $\{k_1, \ldots, k_n\}$ złożony z $n+1$ kotów. Z założenia indukcyjnego koty $k_1, \ldots k_n$ są tego samego koloru. Również z założenia indukcyjnego, koty $k_2, \ldots, k_{n+1}$ są tego samego koloru. Zatem wszystkie koty w tym zbiorze mają ten sam kolor.

Zadanie 3. Uzasadnimy, że w przypadku podróży samolotem warto zabrać ze sobą bombę.

Istotnie, przyjmijmy, że prawdopodobieństwo że któryś z pasażerów (zapewne terrorysta) ma ze sobą bombę wynosi $1 : 100000$. Prawdopodobieństwo, że w jednym samolocie aż dwoje pasażerów ma ze sobą bombę wynosi zatem $1 : 10000000000$. Zatem, jeżeli zabierzemy własną bombę ze sobą, to prawdopodobieństwo, że na pokładzie ktoś ma drugą wynosi $1 : 10000000000$. My naszej bomby nie odpalimy, więc nasze bezpieczeństwo zdecydowanie się poprawia.

Zadanie 4. Pokażemy, że wszystkie liczby naturalne są równe jeden.

Niech n będzie liczbą naturalną. Rozważmy układ równań:

$$\begin{cases} c_1x_1 + c_1x_2 + \cdots + c_1x_n = c_1 \\ c_2x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_2x_n = c_2 \\ \vdots \\ c_nx_1 + c_nx_2 + \cdots + c_nx_n = c_n, \end{cases}$$

w którym wszystkie współczynniki c_i są różne od zera. Dzieląc pierwsze równanie przez c_1, otrzymujemy $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. Skorzystajmy teraz z twierdzenia Cramera. Zastępując i-tą kolumnę macierzy głównej A naszego układu, kolumną wyrazów wolnych, otrzymujemy macierz $A_i = A$. Zatem $x_i = \frac{|A_i|}{|A|} = 1$.

Stąd $\sum_{i=1}^{n} 1 = 1$, czyli $n = 1$.

Zadanie 5. Po raz drugi udowodnimy, że $0 = 1$.

Rozważmy następujący wielomian z pierścienia $\mathbb{Z}_6[X]$:

$$p(X) = X^2 + 3X + 2.$$

Współczynnik przy X^4 jest oczywiście równy 0. Zauważmy, że pierwiastkami wielomianu są $1, 2, 4$ i 5, zatem po rozłożeniu na czynniki nasz wielomian ma postać: $p(X) = (X-1)(X-2)(X-4)(X-5)$. Współczynnik przy X^4 jest równy 1. Wiemy, że dwa wielomiany są równe wtedy i tylko wtedy, gdy ich współczynniki przy odpowiednich potęgach są równe. Zatem $0 = 1$.

Rozwiązania prosimy przesyłać na adres *liga@knm.katowice.pl* lub przynosić do pokoju 524 do 10. stycznia 2011 r.

Mikołaj

[O tym, że matematyka potrafi być czasami bardzo złośliwa]

Weźmy do ręki kalkulator i policzmy wartość wyrażenia $\sqrt[12]{1782^{12} + 1841^{12}}$. Otrzymamy wynik 1922. Zatem prawdziwa jest równość:

$$1782^{12} + 1841^{12} = 1922^{12}.$$

Co przeczy twierdzeniu, że dla każdej liczby naturalnej $n > 2$ równanie $x^n + y^n = z^n$ nie ma rozwiązania w liczbach naturalnych, zwanemu Wielkim Twierdzeniem Fermata, które (po ponad 300 latach) zostało udowodnione przez Andrew Wilesa. Coś tu jest nie tak. Gdzie jest błąd?

Okazuje się, że błąd tkwi w naszych obliczeniach. Wykonując powyższe działanie, kalkulator operuje na stosunkowo dużych liczbach i przez to wynik obliczeń nie jest zbyt dokładny. Niestety nie można bezgranicznie wierzyć wynikom uzyskanym na kalkulatorze lub na komputerze.

Zauważmy, że powyższa niby-równość nie ma prawa zachodzić, ponieważ cyfra jedności lewej strony jest nieparzysta, a prawej parzysta.

Innymi znanymi fałszywymi kontrprzykładami do Wielkiego Twierdzenia Fermata są następujące niby-równości:

$$3987^{12} + 4365^{12} = 4472^{12}, \;\; 6107^6 + 8919^6 = 9066^6.$$

Rozważmy następujący problem. Mówimy, że liczba naturalna n jest typu parzystego, jeśli rozkłada się na parzystą liczbę liczb pierwszych (np. $60 = 2{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}5$ jest typu parzystego) – umówmy się, że 1 jest typu parzystego. Analogicznie, mówimy, że liczba naturalna n jest typu nieparzystego, jeżeli rozkłada się na nieparzystą liczbę liczb pierwszych (np. $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ jest typu nieparzystego). Zauważmy, że np. każda liczba pierwsza jest typu nieparzystego. Obok przedstawiono typy kilku pierwszych liczb.

n	typ
1	P
2	N
3	N
$4 = 2 \cdot 2$	P
5	N
$6 = 2 \cdot 3$	P
7	N
$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$	N
$9 = 3 \cdot 3$	P
$10 = 2 \cdot 5$	P
11	N

Zdefiniujmy następujące funkcje. Niech $P(n)$ oznacza ilość liczb typu parzystego mniejszych lub równych n. I analogicznie, niech $N(n)$ oznacza ilość liczb typu nieparzystego mniejszych lub równych n.

Na postawie powyższej tabeli łatwo sprawdzić, że np. $P(11) = 5$, a $N(11) = 6$, czyli $P(11) \leq N(11)$. W 1919 roku węgierski matematyk George Pólya postawił hipotezę, że powyższa nierówność zachodzi dla dowolnej liczby naturalnej. Okazuje się, że zachodzi ona dla wszystkich liczb naturalnych mniejszych niż 906150257. Dla 906150257 już nie.

Pierwszy kontrprzykład został podany w 1958 roku przez Brytyjczyka Colina Briana Haselgrove'a. Sprawdził on, że nierówność nie zachodzi dla n rzędu $1.845 \cdot 10^{361}$. Jednak operowanie tak dużymi liczbami zawsze wiąże się z ryzykiem, o którym pisałem na początku artykułu. W 1960 roku R. Sherman Lehman pokazał, że nierówność jest fałszywa dla $n = 906180359$. A najmniejszym możliwym kontrprzykładem jest wspomniane wyżej $n = 906150257$. Pokazał to w 1980 roku Minoru Tanaka.

W matematyce trzeba uważać.

vil

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelny: Mateusz Jurczyński
Sekretarz redakcji: Joanna Zwierzyńska
Projekt okładki: Tomasz Kochanek

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

macierzator@knm.katowice.pl.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: www.knm.katowice.pl.

grudzień 2010

[Matematyka jak poezja]

z Profesorem Andrzejem Lasotą rozmawia Profesor Tomasz Szarek

Prezentowany poniżej tekst to pełna wersja rozmowy Pana Profesora Andrzeja Lasoty z jednym z Jego uczniów – Profesorem Tomaszem Szarkiem. Wywiad ten ukazał się w 1998 roku na łamach *Przeglądu Powszechnego.*

Redakcja [MACIERZATORA] pragnie złożyć serdeczne podziękowania Panu Profesorowi Tomaszowi Szarkowi oraz Redakcji *Przeglądu Powszechnego* za wyrażenie zgody na wydrukowanie wywiadu.

***

– Panie Profesorze, rozpowszechniony jest pogląd, że wszystkie dyscypliny wiedzy, poza matematyką, zasługują na miano nauki tylko przez uprzejmość. Co sprawia, że matematyka cieszy się tak uprzywilejowaną pozycją pośród innych nauk?

– Niewątpliwie jest wiele nauk, które nie są matematyczne. Zasadnicza różnica między nimi a matematyką polega na tym, że można w nich drastycznie zmienić poglądy. Otóż w matematyce tak nie jest. Jeśli się porządnie udowodni jakieś twierdzenie, co oznacza, że matematyk przy jego dowodzie się nie pomyli, a kilku jego kolegów matematyków je sprawdzi, to wtedy zasadniczych zmian nie można oczekiwać. Dzieje się tak po prostu dlatego, że matematyka to jest pewien algorytm – sposób postępowania, który, zastosowany poprawnie, musi dać zawsze taki sam rezultat. Tajemnica tkwi w tym, dlaczego musi dać zawsze taki sam rezultat. Ale tajemnica ta jest na tyle trudna, że nie podejmuję się jej rozwiązać. Dlaczego powtarzając rozumowanie, musimy otrzymać ten sam wynik, jeśli prowadzimy je poprawnie? Mnie się wydaje (mogę się jednak mylić), że odpowiada za to konstrukcja świata. Świat jest rzeczywiście tak skontruowany, że wyniki doświadczeń i rozumowań są powtarzalne, przy czym są powtarzalne w sposób absolutny, kiedy rozumujemy zgodnie z przyjętymi od tysiącleci, przynajmniej od Arystotelesa, pewnymi kanonami logiki. Jeżeli prowadzimy rozważania na obiektach matematycznych według dwuwartościowej logiki, to dochodzimy nieustannie do tych samych wniosków. Trzeba także pamiętać, że obiekty matematyczne są w idealny sposób sprecyzowane. Mnie się osobiście wydaje, że dzieje się tak dlatego, iż wszystkie twierdzenia matematyczne można sprowadzić do twierdzeń o liczbach naturalnych. A liczby naturalne mają tę zadziwiającą własność, że wszystkie wykonane na nich rachunki dają ten sam wynik. Oczywiście, to że $3 \times 5 = 5 \times 3 = 15$ jest stosunkowo łatwe do wyobrażenia, lecz pewne obliczenia są naprawdę skomplikowane i każdy kto kiedykolwiek pracował przy jakimkolwiek problemie numerycznym, czy nawet pracował w takim dziale jak księgowość w dużym przedsiębiorstwie i zobaczył, że to wszystko się zgadza, odczuwa wrażenie swoistego cudu. Ten cud się zdarza we wszystkich bankach na świecie tysiące razy dziennie. Tak są skontruowane liczby naturalne. Ponieważ myśląc matematycznie, w gruncie rzeczy działamy w tej pracy logicznej na liczbach naturalnych, więc wyjaśnia to troszeczkę cud powtarzalności rozumowań matematycznych. Wówczas jedynym przyjętym przez nas założeniem pozostaje założenie niesprzeczności aksjomatyki liczb naturalnych – wszystko inne możemy już sprowadzić do tej aksjomatyki.

Można powiedzieć, i takie pojawiały się zdania, że liczby naturalne stworzył Bóg, a wszystko inne jest wymysłem człowieka. Może rzeczywiście tak jest? W każdym razie jest jakaś numeryczna konstrukcja świata, która jest poprawna, a jej poprawność zapewnia poprawność rozumowań matematycznych. To właśnie wyróżnia matematykę spośród wszystkich innych dziedzin.

– A czy te nierozmyte obiekty matematyki i twierdzenia o nich my jedynie odkrywamy, czy je tworzymy? Innymi słowy: czy podziela Pan stanowisko platonizmu – jak podobno 75% *społeczności matematyków – czy też opowiada się Pan za konceptualizmem?*

– Muszę zacząć od stwierdzenia, że mam kontrowersyjny pogląd nie tylko na matematykę, lecz na konstrukcję nas jako istot myślących. Otóż mam bardzo niedobry pogląd. Uważam mianowicie, że umysł ludzki jest tworem materialnym. Różnica między mną a materializmem i marksistami w szczególności jest taka, że na tym się to nie kończy. To znaczy podzielam pogląd, który wypowiadali niektórzy mędrcy hinduscy, że ciało i umysł są nam dane, a pierwiastek transcendentalny to ani umysł, ani ciało, ale coś, co jest ponad umysłem i ponad ciałem. Takie jest moje zdanie. Bardzo trudno to umotywować, uzasadnić, ale nie jest to niemożliwe. Proszę, niech Pan zwróci uwagę, że nasi przodkowie przed wieloma wiekami odróżniali istoty żywe od istot nieżywych głównie wskutek tego, że istoty żywe się poruszają. Dzisiaj każde dziecko w każdym sklepiku może sobie kupić zabawki elektroniczne, które się świetnie poruszają. Ale to są twory martwe, materialne, a więc nie ruch stanowi istotę bytów żywych. Dalej, wydawało się, że niektóre rozumowania, czy też rozwiązywanie pewnych zagadnień, są właściwie tylko umysłom związanym z jakąś transcendencją. Tymczasem nie, komputer składa się z pewnej liczby połączeń elektronicznych i na upartego, chociaż wydaje się to niewyobrażalnie skomplikowane, można by go powtórzyć mechanicznie – tzn. z filozoficznego punktu widzenia nie ma różnicy, powiedzmy, między zespołem trybików a komputerem – jest to tylko kwestia szybkości i miniaturyzacji. Formalnie jednak można zrobić mechaniczny komputer, który wyglądałby jak jakaś kolosalna maszyna z powieści Lema. Otóż komputer jest mechanizmem i ten mechanizm potrafi rozwiązywać rozmaite zagadnienia, które kiedyś uważano za właściwe umysłowi ludzkiemu, duszy człowieka. Gdy się otworzy czaszkę człowieka, to widać połączenia neuronowe, przypominające do złudzenia połączenia w komputerze. Obecnie buduje się nawet komputery, które działają na sieciach równoległych, korzystając z wiedzy podpatrzonej w mózgu ludzkim. Otóż ta działalność materialna mózgu, tzn. prądy biegnące po neuronach, w ogóle działalnie neuronów, chociaż w małym stopniu znane, jest działaniem pewnego kolosalnego komputera i jest to proces czysto materialny. Dlatego kiedy tworzymy matematykę, czynimy to fizyczną częścią mózgu. Gdzie, w którym miejscu ta część, powiedzmy, transcendentalna łączy się z działalnością tego, co nazwaliśmy komputerem mózgowym, nie wiem. Rozwiązanie tej zagadki, najciekawszej i najtrudniejszej nie tylko w przyrodzie, ale właściwie największej zagadki świata, dla samej matematyki nie ma istotnego znaczenia. Swoją drogą, nikt tego fenomenu nie ujął lepiej niż Wisława Szymborska w wierszu „Zdumienie". No, może jeszcze Hugo Steinhaus. Ciekawa rzecz: z jednej strony matematyk, z drugiej poetka. Znakomity polski matematyk – uważam go za jednego z największych – i niewątpliwie jedna z najlepszych polskich poetek sformułowali, tylko w nieco inny sposób, to samo zagadnienie: dlaczego ja jestem ja? Czuję doskonale, że gdyby ktoś skonstruował z identycznych komórek takiego samego Andrzeja Lasotę i później mnie unicestwił, to mnie nie będzie. To dobry argument i przy tym niesłychanie przekonujący, wymyślili go filozofowie jeszcze przed eksperymentami z klonowaniem. Mówi mi on, że jest coś we mnie, co nie jest tylko komputerem, ale ja nie potrafię powiedzieć, co to takiego.

Nasz komputer mózgowy jest zbudowany z materii, a więc tworząc własne pomysły, stwarza je w gruncie rzeczy podobnie do idei zawartych w świecie materialnym. Wobec tego matematyka wymyślona przez mózg jest analogiczna do tej, która została wkomponowana w świat zbudowany jak on z elementów materialnych. Tak się złożyło, że przed naszą rozmową trochę przeglądałem Miłosza. Czytałem jego „Sześć wykładów o dolegliwościach naszego wieku" – cykl odczytów wygłoszonych na Uniwersytecie Harvarda. Czytałem Miłosza i zdumiewałem się, że niektóre problemy w matematyce są niemalże analogiczne do problemów w poezji. Mianowicie Miłosz w pewnych momentach wyraźnie optuje za poglądem, że dobra poezja to taka poezja, która odzwierciedla rzeczywistość, ujmując w słowach bogactwo rzeczywistego świata i złożoność jego problemów. Otóż, można z pewnością tworzyć abstrakcyjną poezję surrealistyczną, która nic nie mówi o świecie, ale Miłosz uważa, że to zła poezja. Dadaizm, surrealizm, wszystkie oderwane od rzeczywistości czysto estetyczne, formalne pomysły są de facto klęską poezji. Zdumiewa mnie, że mam podobny pogląd na matematykę, jak

Miłosz na poezję. Uważam bowiem, że dobra matematyka to odzwierciedlenie świata, odzwierciedlanie rzeczywistości i znajdowanie matematycznej struktury w świecie. Można sobie oczywiście wyobrażać piękne struktury formalne, niemające żadnego związku z rzeczywistością, ale to na ogół złudzenie. Na przykład algebry Boole'a, odkryte w sposób formalny, okazały się znakomitym odzwierciedleniem połączeń elektronicznych. Mimo to, kiedy przegląda się te miliony prac, które są dzisiaj publikowane, no setki tysięcy (po wojnie udowodniono kilka milionów twierdzeń), to w tej ogromnej masie na pewno jest wiele konstrukcji całkowicie surrealistycznych. Są one formalnie poprawne i zgodne z zasadami myślenia matematycznego, ale w rzeczywistości nic nowego nie tworzą i są brzydkie. Podobnie jak pewne zestawy pustych dźwięków mogą tworzyć coś w rodzaju wiersza, a naprawdę wierszem nie są. Dobra matematyka jest to odkrywanie matematyki w rzeczywistości, czy raczej odkrywanie matematycznej struktury w rzeczywistości; w złej matematyce struktury buduje się formalnie. Zła matematyka przypomina mi trochę koszmarny sen, ten bowiem składa się z elementów rzeczywistych, tylko ułożonych w nonsensowny, formalny ciąg. Nawiasem mówiąc, do dziś nie wiemy dokładnie, na czym polega sen. Na przykład obiekty matematyczne mogą się śnić w postaci konkretnego przedmioty, a jakaś taka walka z przedmiotem, ustawianie go, powoduje, że w nowym języku, języku snu, kontynuujemy rozważania matematyczne. Mnie się wydaje, ze sen jest potrzebny po to, ażeby wrażenie i uczucia z całego dnia uporządkować. Natomiast dobra matematyka, jak dobra poezja, powtórzę to raz jeszcze, to twórcze poznawanie struktury rzeczywistości.

– *Czy matematycy sięgają po poezję?*

– Jednym z ludzi, którzy wywarli na mnie istotny wpływ i przyczynili się do ukształtowania moich poglądów matematycznych, był Marceli Stark. Wybitny matematyk, który kochał książki, pisał je i pomagał wydawać. To on przyczynił się, a właściwie zadecydował o powstaniu i rozwoju sławnych serii Biblioteki Matematycznej i Monografii Matematycznych. Był to człowiek pod wieloma względami wyjątkowy. Andrzej Turowicz wspomina: Pamiętam, iż kiedy mu powiedziałem, że choć przepadam za poezją dawniejszą, nie rozumiem współczesnej, Stark odpowiedział: „Weź i czytaj Szymborską". Powiedział to w 1974 r. Najlepsze wiersze w życiu poznałem z tomików, które czytał mi Ryszard Engelking, i tych, które podarował mi Zdzisław Opial.

– *Jeśli nasz umysł, będący w końcu tworem materialnym, poznaje struktury matematyczne, które są w nim zakodowane, to skąd pojawia się w matematyce pojęcie nieskończoności?*

– Są pewne rzeczy, na które z kolei ja jestem mało wrażliwy. Zastanawia mnie, że wielu ludzi i to dobrze wykształconych, nie ma tego zdumienia, które miała Szymborska, które spotykamy u Steinhausa. Nie dziwi ich, że oni to właśnie oni, a nie ja. Że każdy z nich jest sobą, a nie swoim ojcem czy bratem, czy Arystotelesem. Na moich oczach zabito Kennedy'ego. Był to dla mojego pokolenia człowiek bardzo ważny, ktoś, z kim wiązaliśmy nadzieje na lepszy, bardziej uporządkowany świat, na jakieś dobre zmiany w tym świecie. Myśmy wszyscy płakali, gdy go zabito, ale nikt z nas w najmniejszym stopniu wówczas nie umarł. Wraz z tą śmiercią nie ubyło w najmniejszym stopniu mojej świadomości, mojej jaźni, niczego ze mnie. Otóż to, dlaczego ja, jestem ja, a Kennedy był Kennedym, jest niewątpliwie wielką zagadką. Do niektórych ludzi to nie dociera, to, co ja mówię, jest dla nich zupełnie niezrozumiałe. Co to za zagadka, ja jestem ja, ty jesteś ty.

Otóż w podobny sposób ja jestem nieczuły na problem nieskończoności, w ogóle nie uważam tego za żaden problem. Mój ulubiony przykład, który często powtarzam, ukazuje nieskończoność jako abstrakcję czegoś, czego jest bardzo dużo. Dzieci tak liczą: jeden, dwa, dużo. Dużo – to po prostu nieskończoność. Nieskończoność jest to tak wielka liczba, że odejmowanie od niej jedynki czy też dodawanie do niej jedynki nic właściwie nie zmienia. Dziecko zdaje sobie z tego sprawę: gdy jest jeden cukierek i ono go weźmie, to mama zobaczy, że zniknął; jeśli jednak jest całe pudełko cukierków i dziecko weźmie jeden, to mama nie zobaczy. Rzeczywistość nie jest matematyką, tych cukierków nie jest nieskończenie wiele i ja się o tym niejednokrotnie w dzieciństwie przekonałem – wybierałem po jednym i w końcu rodzice się zorientowali, że sięgam do pudełka z cukierkami. Zorientowali się dlatego, że matematyka operuje pojęciem nieskończoności, że tak powiem, rzeczywiście nieskończonej, no a pudełko, choć wypełnione po brzegi cukierkami, nie miało ich nieskończenie wiele. Ale miało dużo, więc przez jakiś czas ta sztuczka się udawała.

– *Czy są granice stosowalności matematyki?*

– Niewątpliwie można dzisiaj dostrzec penetrację nowych obszarów ludzkiego poznania przez matematykę. Nie idzie ona gładko. Matematyka została najpierw zaobserowana w astronomii. To poszło łatwo, bo nasz układ słoneczny funkcjonuje niezwykle precyzyjnie i wobec tego niemal natychmiast nadawał się do modelowania matematycznego. Podobnie wiele rzeczy związanych z miernictwem na ziemi. Zastosowanie matematyki i matematyzacja fizyki nastąpiły za czasów Galileusza, no i oczywiście Newtona. Później proces ten przebiegał jak burza, osiągając taki stan, że współczesna fizyka to tak naprawdę pewien zespół równań matematycznych, którym nadajemy pewną treść fizyczną. Bo właściwie: co to jest mechanika kwantowa? To jest pewien zespół równań matematycznych, którym nadajemy interpretację fizykalną. Tutaj doszliśmy do momentu, kiedy obiekty realne zachowują się w sposób idealny. Znacznie trudniej jest, jeśli idzie o penetrację chemii przy zastosowaniu matematyki. Na przykład w chemii dużych cząstek rozwiązania odpowiadających im modeli fizykalnych, które prowadzą do skomplikowanych układów równań typu Schroedingerowskiego, są praktycznie niewykonalne. Na przykład w chemii polimerów widać, że chemicy muszą mieć kolosalne wyczucie, bo nie wszystko można tam policzyć. Chemia się matematyzuje, ale nie tak szybko jak fizyka. Zupełnie inaczej ma się rzecz z biologią. O ile fizyka i chemia opierają się na stosunkowo niewielu zasadniczych prawach, o tyle w biologii takich fundamentalnych praw brak. Innymi słowy, nie można odtworzyć działania układu biologicznego na podstawie kilku ogólnych praw. Wykładałem jakiś czas temu rachunek wariacyjny. Otóż jakikolwiek obiekt fizyczny się weźmie i napisze odpowiadające mu w mechanice klasycznej równanie Lagrange'a, to z tego wyniknie, jakie równanie on spełnia. Równania mogą być bardzo trudne do rozwiązania, mogą być także trudne do interpretowania fizycznego, ale my dysponujemy algorytmem. W mechanice klasycznej jest powiedziane: weź taki a taki funkcjonał, poszukaj jego minimum i to będzie rozwiązanie naszego problemu. Przynajmniej formalnie mamy mechanizm postępowania. Gdy patrzę na mrowisko, nie umiem wskazać praw, które powiedziałyby mi, że to musi być tak a tak, bo spełnione jest to i to. Nie potrafię sobie tego wyobrazić nawet teoretycznie. John Murray z Oxfordu – jeden z nawybitniejszych biomatematyków świata, który wsławił się m.in. matematycznym wytłumaczeniem prążków na skórze krokodyli i tygrysów – uważa, że przejście od materii nieożywionej do związków organicznych funkcjonujących jako żywe istoty jest potężnym skokiem jakościowym. Pojawia się ogromnie wiele możliwości rozwoju i różnicowania, wobec których na razie pozostajemy bezradni. W tym miejscu pojawia się bardzo ciekawy problem filozoficzny, a mianowicie pytanie o redukcjonizm. W dalszym ciągu pojawiają się subtelne rozważania redukcjonistyczne sugerujące np., że wszystkie nasze uczucia to tylko praca neuronów. Ja się z tym nie zgadzam. Uważam, że nie da się odtworzyć umysłu, obserwując prądy i zjawiska biochemiczne zachodzące w mózgu człowieka; jeden z filozofów powiedział, że nie da się odtworzyć smaku czekolady, obserwując reakcje zachodzące w mózgu człowieka jedzącego czekoladę. Można odtworzyć sposób reakcji mózgu na smak czekolady, ale nie odtworzymy w ten sposób samego smaku. Smak to zupełnie coś innego. Właśnie to coś nowego, co opiera się redukcjonizmowi.

Muszę przyznać, że w tym wywiadzie na 90% pytań nie umiem odpowiedzieć, mogę jedynie wyrazić moje stanowisko. A moje stanowisko jest takie, że matematyka jest częścią materialnego świata, jest funkcją materialnego świata. Samo zaś przechodzenie od jednych struktur do drugich jest matematycznie coraz trudniejsze i w biologii zaczyna się właściwie załamywać.

Prawa biomatematyki dotyczą pewnych wyizolowanych mechanizmów, np. potrafimy zapisać równania związane z pracą układu krwiotwórczego albo z pracą narządu wzroku. To wszytko potrafimy matematycznie opisać, dlatego że są to pewne procesy wyodrębnione z całości, i to procesy szczególnie podatne na opis matematyczny. Nie można natomiast napisać równania matematycznego opisującego życie uczuciowe. Pewne procesy fizjologiczne, np. zmiany pracy serca, są dość dobrze opisane matematycznie, dysponujemy już niezłymi monografiami dotyczącymi arytmii serca i, co ważniejsze, wspomniane modele matematyczne znajdują uznanie wśród specjalistów – niektórych specjalistów, można bowiem zaobserować wśród lekarzy dużą niechęć do uczenia się matematyki. Z tego, co powyżej powiedziałem, wynika, że są pewne działy biologii czy medycyny znakomicie poddające się modelowaniu matematycznemu, ale ma to właściwie miejsce wtedy, kiedy odchodzimy od tego, czym w istocie jest żywa materia. Modelujemy matematycznie tę część rzeczywistości, która jest niejako mechaniczna. Jak więc widzimy, zastosowania matematyki do biologii i medycyny są użyteczne, ale dotyczą, jeśli tak można powiedzieć, najbardziej materialnej części żywego organizmu, nic nie mówiąc nam o istocie życia, ani tym bardziej o istocie świadomości.

– *A relacje matematyki z naukami społecznymi, socjologią, ekonomią?*

– Jeżeli założymy, że w jakiś sposób rozumiemy zachowanie pojedynczego człowieka, to z tego wcale łatwo nie wynika, jak będzie wyglądało zachowanie tłumu albo społeczeństwa. Mnie się bowiem wydaje, że skok jakościowy pojawia się między pojedynczymi komórkami a świadomym organizmem wielokomórkowym, jakim jest człowiek, nie zaś między człowiekiem a społeczeństwem. Człowiek nie jest molekułą, w każdym z nas tkwi nieprawdopodobna liczba możliwości reagowania. Ludzie bowiem działają i pracują nie tylko w zależności od swojej sytuacji ekonomicznej, jak chciał Marks, ale zależnie od swoich poglądów, przekonań, a nawet przynależności narodowej i religijnej. Lat temu kilkadziesiąt każdy ekonomista, któremu mówiło się takie rzeczy, śmiał się do rozpuku, twierdząc, iż jest to podejście nienaukowe. Obecnie pojawiają się prądy w ekonomii, które zaczynają uwzględniać uczucia ludzi w stosunku do obiektów ekonomicznych. Jestem absolutnym zwolennikiem tego poglądu. Tak jak częścią marksizmu jest materializm historyczny, tak częścią moich poglądów na te zagadnienia jest idealizm historyczny. Uważam bowiem, że ekonomiczny rozwój społeczeństwa w dużej mierze jest zależny od ideologiczno-emocjonalnego nastawienia ludzi. Nie byt kształtuje świadomość, ale świadomość kształtuje byt.

– *Wiek XX przyniosł głęboką rewolucję w podstawach matematyki. Mam na myśli grupę twierdzeń potocznie zwanych twierdzeniami limitacyjnymi,* *a dowiedzionych przez Goedla, Skolema-Loewenheima, Churcha. Czy matematyk w swej pracy jest świadomy ograniczeń, jakie nakładają te twierdzenia?*

– Najpierw wyjaśnijmy krótko, o co tutaj chodzi. Dowodząc jakiegoś twierdzenia, matematyk musi przestrzegać pewnych reguł postępowania, podobnie jak szachista poruszający się gońcem może chodzić tylko po przekątnej. Wypowiedzi prawdziwych twierdzeń jest wiele – porównajmy je do całości szachownicy; otóż poruszając się czarnym gońcem nigdy do pewnych pól (białych) nie dojdziemy, ponieważ nie pozwalają na to reguły gry. Kwestie te są pasjonujące dla specjalistów z podstaw matematyki i właściwie każdego matematyka, kiedy o nich myśli. Na ogół jednak, gdy zajmujemy się swoimi problemami, ograniczenia te umykają. To jest coś takiego jak to, iż każdy z nas wie, że będzie musiał umrzeć, ale pracuje, jakby miał żyć wiecznie. Matematycy zapominają o tym, że tak niewiele można dowieść w stosunku do tego, co w matematyce ważne, a co poza możliwościami dowodowymi. Mimo to staramy się walczyć o tę niewielką cząstkę znajdującą się w zasięgu naszych możliwości.

– Panie Profesorze, matematyka podlega ewolucji. Bez wątpienia inny był poziom ścisłości dowodów w Euklidesowych „Elementach", inny jest we współczesnej matematyce. Myślę, że taką linię demarkacyjną wyznacza osoba Weierstrassa...

– Tak, Weierstrass rzeczywiście dokonał przełomu w naszym rozumieniu: co to jest ścisłość dowodu, zwłaszcza w analizie matematycznej.

– Moje pytanie brzmi następująco: w jakim kierunku będzie ewoluować matematyka? Bo co do tego, że będzie się zmieniać, nie mamy wątpliwości. Czy będzie bardziej ścisła i sformalizowana, czy raczej nacisk będzie w niej położony na intuicję?

– Bardzo ciekawe i ważne pytanie. My nie zajmujemy się matematyką, my tylko próbujemy powiedzieć coś o niej i w związku z tym nie można być tego zupełnie pewnym. Możemy się mylić. Wydaje mi się jednak, że obecne trendy są niedobre. Powstają duże grupy matematyków uprawiających dobrą matematykę, niestety w coraz mniej precyzyjny sposób. Paru moich matematycznych przyjaciół z Warszawy i Torunia odsądzi mnie od czci i wiary, ale ja właśnie o polskiej matematyce nie będę mówił źle. Bo w Polsce mamy jeszcze do czynienia ze starą, dobrą tradycją precyzyjnej matematyki. Ale właśnie w dziedzinie, która się też w Toruniu i Warszawie rozwija, w teorii gładkich układów dynamicznych, spotykamy dużą liczbę twierdzeń sformułowanych i dowiedzionych w sposób, który budzi u innych matematyków poważne zastrzeżenia. Na przykład dowód twierdzenia o ergodyczności modelu gazu doskonałego zaproponowany przez Sinaia zawierał tyle luk, iż jak głosi plotka, napisano wiele rozpraw doktorskich, by je uzupełnić. Zresztą nie wiem dokładnie, jak się ta historia skończyła. Widziałem kiedyś prace pisane przez specjalistów w dziedzinie gładkich układów dynamicznych, a dotyczące układu Lorenza – znanego przykładu naśladującego zjawisko turbulencji – w których podano i udowodniono wiele własności chaotycznych i... te dowody nikogo nie przekonały. Trzeba się pochwalić, że pierwszy precyzyjny dowód istnienia chaotycznych rozwiązań równania Lorenza podali matematycy polscy: M. Mrozek i jego współpracownicy z Krakowa. Co ciekawsze, dowód ten był jednym z pierwszych precyzyjnych, ale wspomaganych komputerowo. Obawiam się, iż będzie się pojawiać coraz więcej niedobrej, nieprecyzyjnej matematyki. Wynika to z dwóch rzeczy: pierwsza sprawa – matematyka jest trudna i robi się tym trudniejsza, im bardziej chcemy ją uprawiać szczegółowo i dokładnie. Sprawdzenie wszystkiego niesłychanie opóźnia nasze postępy. Jeśli pozwolimy sobie na pewną dowolność, to idzie nam to znacznie szybciej. To, o czym mówimy, jest najlepiej widoczne w pracy fizyków. Prace fizyków są prawdopodobnie najmniej precyzyjne ze wszystkich zastosowań matematyki (znowu obawiam się, że niektórzy fizycy śmiertelnie się na mnie obrażą), ale w ten sposób zawierają wyniki, które mi imponują. Mamy ogromny szacunek dla fizyków. Abstrahując od tego, że złą matematykę mogą robić ludzie głupi, żyjący iluzją, że matematykę znają i rozumieją, trzeba stwierdzić, iż znakomici naukowcy, jeśli chcą szybko osiągnąć daleko idące wyniki, nie mogą zwracać uwagi na precyzję. Z punktu widzenia czystego matematyka prace Einsteina nie są rozprawami bez zarzutu. Swoboda stylu miesza się w nich z głębią obserwacji. Oczywiście, okazało się, że można wiele rzeczy sformalizować; dla szczególnej teorii względności można podać aksjomatykę i w rzeczywistości wiele takich aksjomatyk podano. Nawiasem mówiąc, nie pchnęło to w ogóle teorii względności do przodu i raczej postęp jest czysto estetyczny. Otóż, chcąc stosować matematykę, naukowcy niematematycy są zmuszeni robić to – nazwijmy to umownie – byle jak. Inny klasyczny przykład to R. Feynman. Liczył on całki w przestrzeniach funkcyjnych (zwane dziś całkami Feynmana) w sposób, który każdego matematyka musi doprowadzić do rozpaczy. Ale on je liczył i nawet dostał Nagrodę Nobla, wyjaśniając pewne fakty z zakresu mechaniki kwantowej. Matematycy, siedząc dziesiątki lat, próbują policzyć to poprawnie; powstają z tego grube, wielotomowe dzieła, których przestudiowanie w ciągu jednego życia jest niemożliwością. Gdyby Feynman w ten sposób chciał budować teorię całki, brakłoby mu czasu na rozważanie zagadnień mechaniki kwantowej. Więc to jest jeden powód. Drugi jest taki, że układy dynamiczne, o których tu mówimy, są tak skomplikowane, że w gruncie rzeczy są bardziej fizykalne niż matematyczne. W związku z tym ludzie pracujący w teorii gładkich układów dynamicznych często pozwalają sobie na pewien sposób rozumowania zbliżony raczej do rozumowania fizyków. Właściwie gdy się czyta książki Sinaia i Arnolda, to często ma się wrażenie, że się słucha bardzo dobrego fizyka, bardzo zmatematyzowanego fizyka. Próbowałem dawać do czytania studentom niższych lat matematyki książki Arnolda z równań różniczkowych i muszę przyznać, że było to bardzo demoralizujące. Arnold pisze w sposób tak luźny, że trzeba być naprawdę dobrym matematykiem, żeby zbudować pomiędzy dwoma zdaniami poprawne przejście logiczne. Czasami może się to nawet nie udać. Z drugiej strony niejeden specjalista z równań różniczkowych dopiero z książki Arnolda może zrozumieć, czym się naprawdę zajmuje.

– *Einstein powiedział kiedyś, że matematycy wiedzą dużo, ale nigdy to, o co ich pytają fizycy. Tak więc ze strony fizyków również pojawiają sie zarzuty, że matematyka nie spełnia ich oczekiwań.*

– Oczywiście. Nie chcę użyć trywialnego porównania, ale niektóre kobiety prowadzą mieszkanie w taki sposób, że jest ono bardzo uporządkowane, tylko żyć się w nim nie da. Otóż matematycy robią coś takiego ze swoją nauką – ona jest bardzo porządna, tylko niestety czasami już się do niczego nie nadaje.

– *Panie Profesorze...*

– Jeśli można, chciałbym powrócić do poprzedniego zagadnienia. Mówiliśmy o dobrej stronie odejścia od ścisłości. Dopóki świat będzie tak postępował, że w czołówce będą szli ludzie, którzy postępują nieprecyzyjnie, a za nimi podążać będą ci, którzy dokonają formalizacji, to wszystko w porządku. Mówi się, że XX w. jest wiekiem biologii, broni atomowej i czegoś tam jeszcze, każdy może coś tutaj dodać. Według mnie jest to również wiek hochsztaplerstwa w nauce, a w szczególności w matematyce; powstaje takie mnóstwo głupich, nieciekawych i nieważnych twierdzeń i całe tomy niepotrzebnych rozważań, napisanych w dodatku w sposób nieprecyzyjny, że człowieka ogarnia przerażenie. Właściwie nie wymyślono idealnego systemu kontroli i przerażająca jest myśl, że np. na język polski przekładane są za drogie pieniądze książki, które są stekiem nonsensów, natomiast wspaniałe pozycje nie są tłumaczone. To jest tragedia, tragedia hochsztaplerstwa w nauce. Jest ono tak duże, że tracimy nad nim kontrolę. I, o zgrozo, to się dzieje także w matematyce. Podkreślam, nie chodzi tu tylko o brak ścisłości. To wspaniałe, że Einstein i Feynman nie byli niewolnikami rygorystycznej precyzji i mogli dzięki temu dokonać rzeczy wielkich. Nie jest też tragedią, że Arnold i Sinai w teorii gładkich układów dynamicznych nie zatrzymali się nad jakimiś szczegółami. Oni poodkrywali tak piękne twierdzenia, stworzyli od podstaw całe gałęzie nauki i otworzyli nam oczy na nowe interesujące własności. Gdyby robili to z Weierstrassowską skrupulatnością, to prawdopodobnie do niczego nowego by nie doszli. Wydaje mi się, że takim typowym przykładem hochsztaplerstwa jest tzw. synergetyka. Całe opasłe tomy poświęcone synergetyce zostały wydane przez jedno z najbardziej prestiżowych wydawnictw naukowych, Springer Verlag. Nie ma tam nic nowego matematycznie, tylko stwierdzenia dobrze już znane i niedbale przedstawione. Smutne to jest, że najbardziej prestiżowe wydawnictwo świata wydaje za ciężkie pieniądze książki bez żadnej wartości.

– Czy w matematyce nastąpi unifikacja pozornie odległych dziedzin, tak jak się to dokonało z algebrą i topologią w topologii algebraicznej?

– Tak, stale będzie się dokonywał postęp w unifikacji, ale będzie on znacznie wolniejszy niż postęp w dyferencjacji. Niestety, w matematyce, jak i w medycynie, jesteśmy coraz bardziej na to skazani.

– G. H. Hardy w swoich badaniach naukowych programowo wybierał kwestie pozbawione możliwości jakiegokolwiek zastosowania praktycznego. Pan Profesor postępuje odwrotnie, tzn. zastosowania wyznaczają obszar Pańskich zainteresowań: biologia, medycyna. Dlaczego? Czy wiąże się to z Pańskim poglądem na matematykę i jej związek z rzeczywistym światem?

– Tutaj wiążą się dwie rzeczy. Po pierwsze Hardy był człowiekiem bardzo kontrowersyjnym. Także ten jego pogląd – cytując bpa Pieronka wypowiadającego się w sprawie pewnego księdza – to problem psychiatry, nie matematyka. Ale jest jeszcze druga kwestia. Naprawdę wielkie zastosowania matematyki, takie jakie robili Einstein, Smoluchowski, specjaliści od mechaniki kwantowej czy fizyki atomowej, są niesłychanie rzadkie. To samo dotyczy zastosowań w biologii czy medycynie – można znaleźć w neurologii kilka prac matematycznych, które zapisały się na trwałe w historii zastosowań matematyki. Natomiast złe zastosowania jest bardzo łatwo tworzyć. Są uniwersytety w Stanach Zjednoczonych, na których w ogóle zlikwidowano matematykę. Rozmawiałem z przyjaciółmi matematykami we Włoszech i okazuje się, że tam panuje podobny pogląd. Moim zdaniem wynika to z tego, że wielu ludzi produkuje śmieci, pośród których giną rzeczy naprawdę wartościowe. Ale niestety nie sposób a priori określić, co jest śmieciem, a co nim nie jest. Dopiero przyszłość bezbłędnie pokazuje, które rezultaty są wartościowe. Mówiąc krócej, największym źródłem naszych nieszczęść jest pośpiech. Nauka w tym względzie nie jest wyjątkiem. Podobnie jest w literaturze i filmie.

– Powiedzmy teraz o Pańskiej współpracy z panią doc. Marią Ważewską-Czyżewską. Czego ta współpraca dotyczyła, jakie wynikły z niej praktyczne zastosowania matematyki w medycynie?

– Ważewska była niezwykle uczciwym naukowcem. Miała ogromną wiedzę hematologiczną i zdawała sobie przy tym sprawę, że niektóre mechanizmy w hematologii można będzie opisać matematycznie. W pewnym momencie brakło jej narzędzi matematycznych i ona mi o tym sprawach opowiedziała. A mnie się to po nocach śniło. Po jakimś czasie zaproponowałem jej kilka modeli i ona wybrała z tych moich pomysłów to, co uważała za biologicznie najciekawsze, doprowadzając mnie zresztą niejednokrotnie do rozpaczy, bo przez tę jej uczciwość modele bardzo piękne, a tylko trochę załgane, musieliśmy odrzucić. Otóż, cośmy w rezultacie zbudowali? Zbudowaliśmy model, który w języku matematyki nazywa się nieliniowym równaniem różniczkowym z opóźnionym argumentem. Ma on pewne własności wymykające się, a nawet, zdawałoby się, urągające zdrowemu rozsądkowi. W tym przypadku, jak mawiał Opial, matematyka jest mądrzejsza od matematyka.

W porównaniu z innymi systemami układ krwiotwórczy działa bowiem stosunkowo prosto i pierwszy doczekał się matematycznych prób opisu. Krwinki są produkowane w szpiku kostnym i po przekroczeniu bariery szpikowej dostają się do krwioobiegu. Tam wypełniają swoje funkcje (np. czerwone transportują tlen), nie rozmnażają się i po wyczerpaniu rezerw enzymatycznych są wchłaniane przez ustrój. Mamy tu więc wyraźnie wyróżnione dwie fazy: okres produkcji (rozmnażania się) w szpiku kostnym i okres funkcjonowania w krwioobiegu. Między tymi fazami istnieje ścisłe sprzężenie. Jeśli w krwioobiegu krwinek jest zbyt mało, produkcja układu krwiotwórczego wzrasta; jeśli jest ich zbyt dużo – maleje. Układ krwiotwórczy reaguje jednak z niewielkim opóźnieniem, jednego do trzech dni. W sumie mamy więc sytuację, która może być dobrze opisana przez równanie różniczkowe z opóźnionym argumentem. Możemy więc do układu krwiotwóczego zastosować naszą teorię i zaobserwować, co się dzieje przy schorzeniach wydłużających czas reprodukcji krwinek. Zgodnie z naszą teorią powinny się pojawiać oscylacje poziomu krwinek, początkowo regularne, potem chaotyczne. Wreszcie może nastąpić przekroczenie granicy tolerancji ustroju. Krzywe śmiertelności powinny być wykładnicze. Zgadza się to dość dokładnie z rzeczywistym przebiegiem niektórych białaczek.

Mając model procesu, można nim sterować. Próby takie udały się Ważewskiej. Docent Ważewska, wykorzystując do planowanej terapii rozwiązania badanego przez nas równania różniczkowego, pomogła w istotny sposób kilku pacjentom z anemią polekową.

Jeżeli nawet w minimalnym stopniu moja praca się do tego przyczyniła, to może jest to najwartościowsza rzecz, jaką w życiu zrobiłem.

marzec 1998