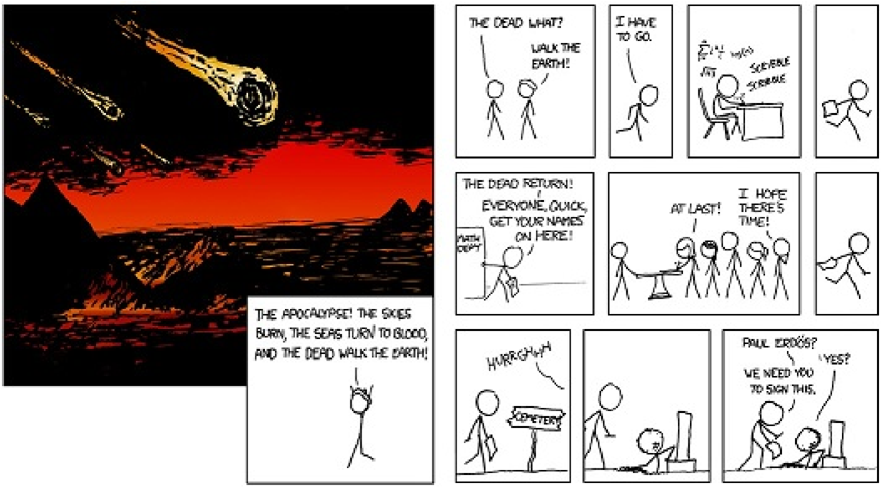
[MACIERZATOR46]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego



Randall Munroe, `http://xkcd.com/`

ISSN 2083-9774

Witamy w kwietniowym numerze [MACIERZATORa]!

Okładka w primaaprilisowym nastroju, lecz treść nie tylko żartobliwa – wydanie otwiera artykuł o najtrudniejszym zadaniu z zeszłomiesięcznego międzynarodowego konkursu matematycznego dla studentów im. Vojtěcha Jarníka; opowiemy również o rozumieniu matematyki, znanym studentom z teorii miary Constantinie Carathéodorym, o gęstości $\sin(\mathbb{N})$ i nie tylko oraz kolejny odcinek *Kącika TEXowego*, w którym o macierzach, wyznacznikach i innych tworach wielolinijkowych.

Przyjemnej lektury życzy redakcja.

[Impresje olimpijskie]

Macierze dodatnio określone vs. wypukłość (1)

Inspiracją do powstania tego artykułu jest nierówność, która pojawiła się podczas rozegranej niedawno 22. edycji konkursu im. Vojtěcha Jarníka w Ostrawie. Została zaproponowana jako zadanie nr 4 dla II kategorii (tj. studentów starszych lat), a więc w domyśle – jako zadanie potencjalnie najtrudniejsze. Jej autorem jest węgierski matematyk Géza Kós, wybrany przewodniczącym jury w tej edycji konkursu.

Zadanie 1. Niech a, b, c, x, y, z, t będą liczbami dodatnimi, przy czym $1 \leqslant x, y, z \leqslant 4$. Udowodnić, że

$$(*) \qquad \frac{x}{(2a)^t} + \frac{y}{(2b)^t} + \frac{z}{(2c)^t} \geqslant \frac{y+z-x}{(b+c)^t} + \frac{z+x-y}{(c+a)^t} + \frac{x+y-z}{(a+b)^t}.$$

Zadanie faktycznie okazało się najtrudniejsze – nie rozwiązał go żaden spośród 69 studentów z II kategorii. Kilkunastu otrzymało co prawda pewną liczbę (najwięcej to 3/10) punktów za częściowe rozwiązanie, ale zaproponowana przez nich metoda nie prowadziła do kompletnego dowodu, co będzie zresztą przedmiotem naszych rozważań. Zacznijmy od oryginalnego rozwiązania.

Rozwiązanie 1 (Géza Kós). Wykażemy najpierw następującą nierówność typu Schura[1]: jeżeli $A, B, C > 0$ oraz $1 \leqslant x, y, z \leqslant 4$, to

$$x(A-B)(A-C) + y(B-A)(B-C) + z(C-A)(C-B) \geqslant 0. \qquad (1)$$

Wobec symetrii możemy przyjąć, że $A \leqslant B \leqslant C$. Niech $U = B - A \geqslant 0$ oraz $V = C - B \geqslant 0$. Wtedy lewa strona nierówności (1) wynosi

$$xU(U+V) - yUV + z(U+V)V \geqslant U(U+V) - 4UV + (U+V)V = (U-V)^2 \geqslant 0,$$

co kończy dowód (1). O nierówności tej można poczytać w artykule [2], gdzie podane są inne warunki wystarczające na zmienne x, y, z.

[1] Nierówność Schura: jeżeli $x, y, z \geqslant 0$ i $r > 0$, to $x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-x)(y-z) + z^r(z-x)(z-y) \geqslant 0$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y = z$, lub dwie spośród zmiennych x, y, z są równe, a trzecia wynosi 0. Mimo że nierówność ta jest symetryczna, dowód polega na złamaniu symetrii. Możemy bowiem założyć, że $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$ i wtedy pierwszy składnik jest nieujemny, a suma dwóch pozostałych wynosi $(z-y)[z^r(z-x) - y^r(y-x)]$, co jest także nieujemne, bowiem $z^r \geqslant y^r$ oraz $z-x \geqslant y-x$. Jak widać, nierówność Schura jest w pewnym sensie konsekwencją porządku, a zamiast funkcji $x \mapsto x^r$ można wziąć dowolną nieujemną funkcję rosnącą. Uwaga: nie jest znane żadne naturalne uogólnienie nierówności Schura na więcej niż trzy zmienne. Przytoczony dowód niejako tłumaczy ten stan rzeczy.

Napiszmy teraz nierówność (1) dla $A = e^{-as}$, $B = e^{-bs}$ i $C = e^{-cs}$. Po wymnożeniu nawiasów otrzymamy nieujemność wyrażenia

$$xe^{-2as} + ye^{-2bs} + ze^{-2cs} - \\ + (y+z-x)e^{-(b+c)s} - (z+x-y)e^{-(c+a)s} - (x+y-z)e^{-(a+b)s},$$

co wydaje się już bardzo bliskie nierówności $(*)$. Różnica polega na tym, że w każdym składniku zamiast u^{-t} mamy e^{-us} (dla $u = 2a, 2b, \ldots, a+b$). Jak jednak wyczarować u^{-t} z e^{-us}? Nierówności możemy oczywiście mnożyć przez liczby nieujemne i sumować stronami. W tym jednak przypadku sumowanie to trochę za mało. Konieczne jest całkowanie! I to jest ten trick, który tak skutecznie ukrył przed zawodnikami związek między nierównością (1) (samą w sobie bardzo prostą) a tezą zadania.

Zauważmy mianowicie, że proste przekształcenie definicji funkcji Γ daje związek

$$u^{-t} = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^\infty s^{t-1} e^{-us} \, \mathrm{d}s, \tag{2}$$

a zatem nierówność $(*)$ wyniknie z tego, co już mamy, po obustronnym pomnożeniu przez $s^{t-1}/\Gamma(t)$ i scałkowaniu względem s od 0 do ∞. ■

Miałem przyjemność brać udział w pracach jury konkursu, na którym pojawiło się powyższe zadanie. Ponieważ uznałem je za najciekawsze z wszystkich ośmiu zadań wyselekcjonowanych do właściwej części konkursu dla obu kategorii, zgłosiłem się jako jeden z jego korektorów. Najbardziej ciekawiło mnie, czy studenci zdołają podać rozwiązanie, które nie angażowałoby funkcji Γ Eulera i które byłoby, w pewnym sensie, bardziej bezpośrednie. Starając się przewidzieć pomysły, które mogły się pojawić w pracach studentów, zacząłem analizować problem, wyłączając z rozważań idee zawarte w oryginalnym rozwiązaniu.

Zauważmy na początek, że nierówność $(*)$ jest liniowa ze względu na zmienne x, y, z, lub – inaczej mówiąc – różnica między lewą a prawą jej stroną jest wartością odpowiedniego funkcjonału liniowego $\Lambda(x, y, z)$. Skoro tak, najmniejsza wartość $\Lambda(x, y, z)$, dla $1 \leqslant x, y, z \leqslant 4$, przyjęta jest w jednym z wierzchołków sześcianu $[1, 4]^3 \subset \mathbb{R}^3$. Wobec symetrii ról zmiennych x, y, z oraz jednorodności Λ, nierówność $\Lambda(x, y, z) \geqslant 0$ wystarczy sprawdzić dla wierzchołków: $(1, 1, 1)$, $(1, 4, 4)$, $(1, 1, 4)$. Mamy więc do pokazania trzy nierówności, niewątpliwie prostsze niż nierówność wyjściowa.

Po zastąpieniu zmiennych x, y, z konkretnymi wartościami pozostaje sześć składników, które sugerują nam wprowadzenie oznaczenia $f(u) = u^{-t}$ dla $u \in (0, \infty)$. Ponieważ $f'(u) = -tu^{-(t+1)}$ oraz $f''(u) = t(t+1)u^{-(t+2)}$, funkcja f jest malejąca i wypukła. Podstawiając w miejsce (x,y,z) wypisane wyżej wierzchołki sześcianu $[1,4]^3$, dostajemy kolejno do udowodnienia następujące nierówności:

($\spadesuit$) $f(2a)+f(2b)+f(2c)\geqslant f(b+c)+f(c+a)+f(a+b)$,
($\clubsuit$) $f(2a)+4f(2b)+4f(2c)\geqslant 7f(b+c)+f(c+a)+f(a+b)$,
($\diamondsuit$) $f(2a)+f(2b)+4f(2c)+2f(a+b)\geqslant 4f(b+c)+4f(c+a)$.

Jeżeli ktoś zna nierówność Karamaty, to w tym momencie powinien poczuć się szczęśliwy. Tak się pewnie poczuło kilkunastu studentów, którzy, jak się później okazało, podążało właśnie takim tropem w swoim rozumowaniu.

Karamata opublikował swoją nierówność w 1932 r., ale w 1928 r. ten sam wynik niezależnie uzyskali Hardy, Littlewood i Pólya. Z tego powodu nierówność czasem nazywana jest właśnie tymi trzema nazwiskami. Przypomnijmy, jak ona wygląda.

Niech $I\subset\mathbb{R}$ będzie dowolnym przedziałem. Mówimy, że ciąg $(x_1,\ldots,x_n)$ elementów I *majoryzuje* ciąg $(y_1,\ldots,y_n)$ elementów I, jeżeli spełnione są następujące warunki:

- $x_1\geqslant\ldots\geqslant x_n$ oraz $y_1\geqslant\ldots\geqslant y_n$,
- $\sum_{i=1}^{j}x_i\geqslant\sum_{i=1}^{j}y_i$ dla $1\leqslant j<n$,
- $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i$.

Tak zdefiniowaną relację majoryzacji zapisujemy jako

$$(x_1,\ldots,x_n)\succ(y_1,\ldots,y_n).$$

Jeżeli $f\colon I\to\mathbb{R}$ jest funkcją wypukłą, a ciąg $(x_1,\ldots,x_n)$ majoryzuje ciąg $(y_1,\ldots,y_n)$, to prawdziwa jest nierówność Karamaty:

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant\sum_{i=1}^{n}f(y_i).$$

Dowód polega na sprytnym wykorzystaniu monotoniczności (ze względu na obie zmienne) ilorazu różnicowego funkcji wypukłej.

Wróćmy teraz do wypisanych przez nas nierówności, odpowiadających wierzchołkom $(1,1,1)$, $(1,4,4)$ i $(1,1,4)$.

($\spadesuit$) Nierówność tę można oczywiście uzyskać z nierówności Karamaty, ale wystarczy zauważyć, że wynika ona z dodania stronami trzech nierówności Jensena:

$$\frac{1}{2}(f(2a)+f(2b))\geqslant f(a+b)$$
$$\frac{1}{2}(f(2b)+f(2c))\geqslant f(b+c)$$
$$\frac{1}{2}(f(2c)+f(2a))\geqslant f(c+a).$$

($\clubsuit$) Tu też nierówność Karamaty nie jest konieczna. Wystarczy dodać stronami następujące trzy nierówności:

$$\frac{1}{2}(f(2a)+f(2b)) \geqslant f(a+b)$$
$$\frac{1}{2}(f(2c)+f(2a)) \geqslant f(c+a)$$
$$\frac{7}{2}(f(2b)+f(2c)) \geqslant 7f(b+c)$$

Do tego momentu wszystko idzie po naszej myśli i trudno oprzeć się wrażeniu, że nasze rozumowanie niechybnie prowadzi do rozwiązania. Sam takie wrażenie odniosłem, jak i parę osób z jury, którym pokazałem szkic tego rozumowania. Choć może się wydawać, że nierówność ($\diamondsuit$) nie oprze się twierdzeniu Karamaty, okazuje się, że właśnie przy tej nierówności ukazuje się istota problemu. Géza Kós pierwszy zauważył kłopot z nierównością ($\diamondsuit$), dokładnie analizując sposób, w jaki kilku studentów próbowało stosować tu nierówność Karamaty. Przyjrzyjmy się temu.

($\diamondsuit$) Rola zmiennych a i b jest tu symetryczna, więc przyjmijmy, że $b \leqslant a$. W przypadku, gdy $c \leqslant b \leqslant a$ łatwo sprawdzamy, że

$$(2a, a{+}b, a{+}b, 2b, 2c, 2c, 2c, 2c) \succ (c{+}a, c{+}a, c{+}a, c{+}a, b{+}c, b{+}c, b{+}c, b{+}c),$$

a zatem nasza nierówność wynika z nierówności Karamaty. Podobnie, jeżeli $b \leqslant a \leqslant c$, to mamy majoryzację

$$(2c, 2c, 2c, 2c, 2a, a{+}b, a{+}b, 2b) \succ (c{+}a, c{+}a, c{+}a, c{+}a, b{+}c, b{+}c, b{+}c, b{+}c)$$

i znów ($\diamondsuit$) wynika z nierówności Karamaty.

Rozważmy jednak przypadek, gdy c leży pomiędzy b i a. Po lewej stronie nierówności ($\diamondsuit$) występują argumenty $2c$ i $a+b$, więc ich uporządkowanie będzie zależało od tego, czy c leży na lewo, czy na prawo od środka przedziału $[b,a]$;

(1) jeżeli $2c \leqslant a+b$, to mamy majoryzację

$$(2a, a{+}b, a{+}b, 2c, 2c, 2c, 2c, 2b) \succ (c{+}a, c{+}a, c{+}a, c{+}a, b{+}c, b{+}c, b{+}c, b{+}c),$$

z której wynika żądana nierówność,

(2) jeżeli zaś $2c > a+b$, to po uporządkowaniu argumentów występujących po lewej i prawej stronie ($\diamondsuit$) na ogół będziemy mieli

$$(2a, 2c, 2c, 2c, 2c, a{+}b, a{+}b, 2b) \not\succ (c{+}a, c{+}a, c{+}a, c{+}a, b{+}c, b{+}c, b{+}c, b{+}c),$$

a więc tutaj nierówność Karamaty nie pomoże.

Po bliższej analizie dochodzimy do wniosku, że niemiła niespodzianka, jaka spotkała nas w przypadku (2), a więc gdy $b \leqslant c \leqslant a$ i $2c > a + b$, nie jest wynikiem naszej nieudolności w stosowaniu nierówności Karamaty, ale po prostu tego, że nierówność ($\diamondsuit$) jest na ogół fałszywa dla dowolnej funkcji wypukłej f. Rozważmy np. wypukłą (i malejącą) funkcję $f\colon [0, \infty) \to [0, \infty)$ daną wzorem

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{dla } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \text{dla } 1 \leqslant x. \end{cases}$$

Połóżmy $b = 0$ (dla uproszczenia; można oczywiście przesunąć wykres f w prawo, aby mieć $b > 0$), $a = 1$ i niech $c \in (\frac{1}{2}, 1)$. Wtedy lewa strona nierówności ($\diamondsuit$) wynosi 1, a jej prawa strona wynosi $4(1 - c)$. Jeżeli więc $\frac{1}{2} < c < \frac{3}{4}$, to nierówność ($\diamondsuit$) nie zachodzi.

Gdyby nierówność Karamaty działała, to działałaby dla każdej funkcji wypukłej f i wtedy moglibyśmy w nierówności ($*$) wszędzie zamiast u^{-t} napisać $f(u)$. Ale tak zrobić nie możemy. W pracach kilkunastu studentów pojawiały się rozumowania oparte na nierówności Karamaty, niektóre mniej, niektóre bardziej precyzyjne. Choć część z nich w pierwszej chwili wydawała się całkowicie poprawna, przedstawiona powyżej luka w rozumowaniu kazała zrewidować początkową ocenę.

Wróciliśmy niejako do punktu wyjścia. Wiemy, że nie można zastąpić funkcji u^{-t} dowolną funkcją wypukłą $f(u)$, i jedyne, czym na razie dysponujemy to oryginalne rozwiązanie. Spróbujmy odpowiedzieć na dwa następujące pytania. Dla jakiej, możliwie szerokiej, klasy funkcji rozwiązanie to daje się zastosować? Czy da się podać, być może mniej trickowy, ale za to bardziej naturalny dowód nierówności ($*$)?

Odpowiedź na pierwsze pytanie jest dość prosta. Funkcja potęgowa u^{-t} pojawiła się w momencie przemnożenia nierówności uzyskanej z (1) przez funkcję nieujemną $s^{t-1}/\Gamma(t)$ i scałkowania względem s od 0 do ∞. To samo rozumowanie byłoby więc w mocy dla jakiejkolwiek funkcji $f\colon (0, \infty) \to (0, \infty)$, którą daje się zapisać w postaci

$$f(u) = \int_0^\infty g(s) e^{-us} \, \mathrm{d}s, \tag{3}$$

gdzie $g(s) \geqslant 0$. Oznacza to po prostu, że $f(u)$ może być transformatą Laplace'a[2] jakiejkolwiek funkcji nieujemnej $g(s)$, co zapisujemy jako $f(u) = \mathcal{L}(g(s))$. Oczywiście klasa takich funkcji jest bardzo bogata, można

[2]Podstawy teorii transformaty Laplace'a, i wiele przykładów, można znaleźć np. w książce [3].

np. obliczyć, że

$$\frac{1-e^{-u}}{u^2} = \mathcal{L}\big(\min\{s,1\}\big), \quad \log\left(1+\frac{1}{u}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1-e^{-s}}{s}\right),$$

co prowadzi do jeszcze bardziej egzotycznych (ale prawdziwych!) wersji nierówności $(*)$. Wersja oryginalna odpowiada formule $u^{-t} = \mathcal{L}(t^{s-1}/\Gamma(t))$ (dla $t > 0$).

Warunek (3) można zapisać ogólniej:

$$f(u) = \int_0^\infty e^{-us}\,\mu(\mathrm{d}s), \tag{4}$$

gdzie μ jest dowolną nieujemną miarą borelowską na $(0,\infty)$, dla której całka (4) jest zawsze skończona. W szczególności nie musi być to miara, która jest absolutnie ciągła względem miary Lebesgue'a. Gdybyśmy chcieli pójść dalej za ciosem i zastąpić funkcję eksponencjalną czymś ogólniejszym, natrafiamy na pewne problemy. W nierówności (1) podstawiliśmy bowiem $A = e^{-as}$, $B = e^{-bs}$, $C = e^{-cs}$, a wymnażając nawiasy skorzystaliśmy po cichu z faktu, że funkcja potęgowa $\varphi_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ (dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$) spełnia równanie $\varphi_\lambda(x+y) = \varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)$ dla $x, y \in \mathbb{R}$. W klasie funkcji ciągłych (a taka jest natura problemu, że tylko te nas interesują) funkcje postaci φ_λ są jedynymi jego rozwiązaniami, a zatem już dalej się nie posuniemy.

Jak więc wyglądają funkcje, które są transformatami Laplace'a nieujemnych miar borelowskich na $(0,\infty)$? Ze wzoru (4) natychmiast wynika, że każda taka funkcja musi być malejąca. Co więcej, wynika z niego, że musi ona być wypukła:

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right) = \int_0^\infty \sqrt{e^{-us}e^{-vs}}\,\mu(\mathrm{d}s) \leqslant \int_0^\infty \frac{e^{-us}+e^{-vs}}{2}\,\mu(\mathrm{d}s) = \frac{f(u)+f(v)}{2}.$$

Na razie nic nas specjalnie nie dziwi – funkcja $f(u) = u^{-t}$ (dla $t > 0$) jest zarówno malejąca, jak i wypukła. Pamiętamy jednak, że teza zadania nie jest prawdziwa dla wszystkich malejących funkcji wypukłych, a dokładniej – nie jest dla nich prawdziwa nierówność $(\diamondsuit)$. Jakie więc jeszcze własności mają funkcje postaci (4)? Otóż, różniczkując względem u, otrzymujemy

$$f^{(n)}(u) = (-1)^n s^n \int_0^\infty e^{-us}\,\mu(\mathrm{d}s) \quad \text{dla } n \in \mathbb{N},$$

a zatem $(-1)^n f^{(n)}(u) \geqslant 0$, co oznacza, że f jest funkcją *całkowicie monotoniczną*. Co więcej, twierdzenie Bernsteina orzeka, że każda funkcja całkowicie monotoniczna musi być postaci (4). Jest to piękne twierdzenie, zwróćmy bowiem uwagę, że funkcje e^{-us}, dla dowolnego $s>0$, są w oczywisty sposób całkowicie monotoniczne, podobnie jak każda ich kombinacja z dodatnimi współczynnikami. Twierdzenie to mówi więc, że nie da się wyprodukować funkcji całkowicie monotonicznej inaczej, niż biorąc uogólnioną kombinację (czyli całkę względem miary nieujemnej) funkcji typu e^{-us}.

O ile monotoniczność i wypukłość funkcji f, czyli nierówności $f'(u)\leqslant 0$ i $f''(u)\geqslant 0$, to zbyt mało, aby zagwarantować nierówność ($\diamondsuit$), o tyle już cały zestaw nierówności $(-1)^n f^{(n)}(u)\geqslant 0$ (dla $n\in\mathbb{N}$) jest tu wystarczający. Zrozumieliśmy więc nieco lepiej zakres stosowalności tricku podanego w oryginalnym rozwiązaniu. Przejdźmy teraz do odpowiedzi na drugie pytanie i spróbujmy znaleźć rozwiązanie w pewnym sensie bardziej naturalne.

Rozwiązanie 2 (poprzez dodatnią określoność). Przekształcając definicję funkcji Γ, podobnie jak przy wzorze (2), możemy napisać

$$(u_i+u_j)^{-t}=\frac{1}{\Gamma(t)}\int\limits_0^\infty s^{t-1}e^{-(u_i+u_j)s}\,\mathrm{d}s$$

dla dowolnych $t,u_1,\ldots,u_n>0$. Wynika stąd, że macierz

$$A(u_1,\ldots,u_n):=\big((u_i+u_j)^{-t}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

jest macierzą Grama[3] dla układu funkcji $(e^{-u_is}\colon 1\leqslant i\leqslant n)$ oraz iloczynu skalarnego danego wzorem

$$\langle\varphi,\psi\rangle=\frac{1}{\Gamma(t)}\int\limits_0^\infty s^{t-1}\varphi(s)\psi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Skoro macierz ta jest dodatnio określona, dla dowolnych $\xi_1,\ldots,\xi_n\in\mathbb{C}$ zachodzi nierówność

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\xi_i\overline{\xi}_j(u_i+u_j)^{-t}\geqslant 0. \tag{5}$$

Zauważmy, że współczynniki, pojawiające się w nierówności $(*)$ przy kombinacjach zmiennych x,y,z, są dokładnie elementami macierzy

$$A(a,b,c)=\begin{pmatrix}(2a)^{-t} & (a+b)^{-t} & (a+c)^{-t}\\ (b+a)^{-t} & (2b)^{-t} & (b+c)^{-t}\\ (c+a)^{-t} & (c+b)^{-t} & (2c)^{-t}\end{pmatrix}.$$

[3]Przypomnijmy, że jeżeli $(V,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ jest przestrzenią unitarną, to *macierzą Grama* dla wektorów $x_1,\ldots,x_k\in V$ nazywamy macierz $(\langle x_i,x_j\rangle)_{1\leqslant i,j\leqslant k}$. Macierz Grama jest zawsze dodatnio określona. Termin *dodatnia określoność* będzie u nas oznaczał to, co czasem nazywa się *półdodatnią określonością*, czyli nieujemność formy kwadratowej wyznaczonej przez daną macierz. Proponujemy Czytelnikowi zajrzenie do świetnej książki [1].

Aby więc wykazać nierówności (♠), (♣) i (♢), do których sprowadza się cały problem, należy jedynie odpowiednio dobrać **zespolone** współczynniki ξ_1, ξ_2, ξ_3 i skorzystać z nierówności (5) dla macierzy $A(a,b,c)$. Współczynniki przy $(2a)^{-t}$, $(2b)^{-t}$ i $(2c)^{-t}$ będą odpowiednio równe: $|\xi_1|^2$, $|\xi_2|^2$ i $|\xi_3|^2$. Współczynnik przy $(a+b)^{-t}$ będzie równy $\xi_1\overline{\xi}_2 + \overline{\xi}_1\xi_2 = 2\mathrm{Re}\xi_1\overline{\xi}_2$, a współczynniki przy $(b+c)^{-t}$ i $(c+a)^{-t}$ – analogicznie: $2\mathrm{Re}\xi_2\overline{\xi}_3$ i $2\mathrm{Re}\xi_3\overline{\xi}_1$.

W przypadku trzech interesujących nas nierówności wymienione współczynniki powinny kolejno przyjąć następujące wartości:

	$\lvert\xi_1\rvert^2$	$\lvert\xi_2\rvert^2$	$\lvert\xi_3\rvert^2$	$2\mathrm{Re}\xi_1\overline{\xi}_2$	$2\mathrm{Re}\xi_2\overline{\xi}_3$	$2\mathrm{Re}\xi_3\overline{\xi}_1$
(♠)	1	1	1	-1	-1	-1
(♣)	1	4	4	-1	-7	-1
(♢)	1	1	4	2	-4	-4

I tak, dla nierówności (♠) stosowne wartości wynoszą:

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1\right).$$

Wyliczenie wartości ξ_1, ξ_2, ξ_3 dla nierówności (♣) wymaga najwięcej zachodu. Dobierzmy kąty $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tak, aby

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \arccos\left(-\frac{1}{4}\right) \quad \text{oraz} \quad \alpha_2 - \alpha_3 = \arccos\left(-\frac{7}{8}\right).$$

Można wówczas sprawdzić, że trójka $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (e^{i\alpha_1}, 2e^{i\alpha_2}, 2e^{i\alpha_3})$ spełnia warunki wypisane w drugim wierszu tabeli. W przypadku ostatniej nierówności (która przy pierwszym podejściu okazała się krytyczna) bardzo łatwo znajdujemy rozwiązanie $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1, 1, -2)$. ■

W naszym rozumowaniu było niezwykle ważne, że współczynniki ξ_1, ξ_2, ξ_3 mogą być zespolone. Wcześniejsze próby korzystania z nierówności Karamaty, czy też nierówności Jensena, pozwalały nam dobierać tylko współczynniki nieujemne i próby te, jak widzieliśmy, nie mogły doprowadzić do sukcesu. W pracach kilku studentów pojawiały się oczywiste błędy rachunkowe, w których dodawali oni do siebie nierówności skierowane w różne strony, czyli po prostu stosowali nierówności Jensena z ujemnymi współczynnikami. Paradoksalnie to jest właśnie klucz do rozwiązania, tyle że wymaga oczywiście precyzyjnego uzasadnienia, czego w pracach studentów zabrakło.

Wypukłość okazała się w pewnym sensie zbyt słabą własnością do rozwiązania zadania. Cała subtelność i trudność nierówności (∗) tkwi w całkowitej monotoniczności oraz dodatniej określoności. Temat ten będziemy jeszcze kontynuować w cyklu *Impresji olimpijskich*.

Dodatnia określoność macierzy pojawiła się w zaskakujący sposób w rozwiązaniu jednego z problemów zaproponowanych podczas 17. edycji *International Mathematical Competition*. Z tym zadaniem poradziło sobie zaledwie 6 spośród 328 studentów.

Zadanie 2. Załóżmy, że liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $-1 \leqslant a, b, c \leqslant 1$ oraz

$$1 + 2abc \geqslant a^2 + b^2 + c^2. \tag{6}$$

Pokazać, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$ mamy

$$1 + 2(abc)^n \geqslant a^{2n} + b^{2n} + c^{2n}. \tag{7}$$

Rozwiązanie. Rozważmy macierz symetryczną

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 1 & c \\ b & c & 1 \end{pmatrix}.$$

Nierówność (6) oznacza po prostu, że $\det A \geqslant 0$. Ponadto, skoro $a \in [-1, 1]$, drugi minor główny macierzy A jest także nieujemny, a zatem kryterium Sylvestera gwarantuje, że macierz ta jest dodatnio określona. Dla pewnej symetrycznej macierzy $B \in M_3(\mathbb{R})$ mamy więc $A = B^2$.

Niech $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^3$ oznaczają kolejne wiersze macierzy B. Z postaci macierzy A oraz związku $A = B^2$ wynika, że:

(i) $\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{z}\| = 1$ (norma euklidesowa),
(ii) $a = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$, $b = \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{z}$, $c = \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{x}$ (euklidesowy iloczyn skalarny).

Nierówność (7) jest równoważna temu, że wyznacznik macierzy

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a^n & b^n \\ a^n & 1 & c^n \\ b^n & c^n & 1 \end{pmatrix}$$

jest nieujemny. Ponieważ drugi minor główny tej macierzy jest nieujemny, będzie to *de facto* oznaczało, że macierz ta jest dodatnio określona. Warunek, który w przypadku macierzy A był konsekwencją jej dodatniej określoności, teraz będzie przesłanką ku dodatniej określoności macierzy A_n. Pokażemy mianowicie, że A_n jest macierzą Grama.

Zauważmy, że warunki (i), (ii) mówią, że A jest macierzą Grama dla trójki wektorów $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$ ze zwykłym iloczynem skalarnym. Na tej podstawie powinniśmy skonstruować przestrzeń z iloczynem skalarnym, w której znajdziemy trzy wektory jednostkowe z odpowiednimi iloczynami wynoszącymi a^n, b^n, c^n.

Rozważmy wektory $\boldsymbol{X} = \otimes^n \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{Y} = \otimes^n \boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{Z} = \otimes^n \boldsymbol{z}$, gdzie symbol $\otimes^n$ oznacza n-tą potęgę tensorową[4]. Każda z tych potęg jest elementem (tensorem prostym) przestrzeni $\otimes^n \mathbb{R}^3$, bowiem produkt $\otimes^n \mathbb{R}^3$ możemy utożsamić z przestrzenią form n-liniowych na $((\mathbb{R}^3)^*)^n$. Oczywiście $\dim(\otimes^n \mathbb{R}^3) = 3^n$, więc wektory $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ można traktować po prostu jako elementy przestrzeni $\mathbb{R}^{3^n}$, a wyliczyć, stosując iloczyn Kroneckera. Np. dla wektora $(1,2,3)^T \in \mathbb{R}^3$ mielibyśmy

$$\begin{aligned} (1,2,3)^T \otimes (1,2,3)^T &= \left(1 \cdot (1,2,3)^T, 2 \cdot (1,2,3)^T, 3 \cdot (1,2,3)^T\right) \\ &= (1,2,3,2,4,6,3,6,9)^T. \end{aligned}$$

Być może dobrze jest popatrzeć na potęgi tensorowe jak na konkretne wektory, ale chcąc wprowadzić dla nich iloczyn skalarny, musielibyśmy formalnie dokonać kilku utożsamień. Znacznie prościej jest zdefiniować taki iloczyn bezpośrednio na tensorach prostych (tak jak robi się to standardowo):

$$\langle u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle_1 \langle u_2, v_2 \rangle_2 \quad \text{dla } u_1, v_1 \in V_1,\ u_2, v_2 \in V_2,$$

o ile tylko $(V_i, \langle \cdot, \cdot \rangle_i)$ są przestrzeniami z iloczynem skalarnym dla $i \in \{1, 2\}$. Taki wzór definiuje iloczyn skalarny na iloczynie $V_1 \otimes V_2$ dwóch dowolnych przestrzeni unitarnych. Widzimy też, że iloczyn skalarny potęg tensorowych jest odpowiednią potęgą iloczynów skalarnych. W naszym przypadku mamy więc:

(iii) $\|\boldsymbol{X}\| = \|\boldsymbol{Y}\| = \|\boldsymbol{Z}\| = 1$,
(iv) $a^n = \boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{Y}$, $b^n = \boldsymbol{Y} \cdot \boldsymbol{Z}$, $c^n = \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{X}$,

a zatem macierz A_n jest macierzą Grama dla wektorów $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Z} \in \otimes^n \mathbb{R}^3$, co kończy rozwiązanie zadania.

Jak się okazuje, nawet iloczyn tensorowy może znaleźć zastosowanie przy dowodzeniu elementarnych nierówności! ■

Uwaga. W przedstawionym rozwiązaniu nie wykorzystaliśmy w pełni założenia, że $-1 \leqslant a, b, c \leqslant 1$, a jedynie to, że co najmniej jedna z tych liczb leży w przedziale $[-1, 1]$. Jeżeli jednak opuścimy także i ten warunek, to teza zadania staje się fałszywa, np. dla $(a, b, c) = (2, 3, 9)$ różnica między lewą a prawą stroną nierówności (6) wynosi 15, podczas gdy dla nierówności (7), i $n = 2$, różnica ta wynosi -825.

[4] Wektory przestrzeni $V = \mathbb{R}^3$ można utożsamiać z formami liniowymi działającymi na V^*, czyli – z elementami przestrzeni V^{**} (przestrzenie skończenie wymiarowe są refleksywne). Mówiąc cywilizowanym językiem, elementy V są tensorami kontrawariantnymi typu $(0, 1)$ (czyli działają 1-liniowo na $V^0 \times (V^*)^1$), a iloczyn n takich wektorów jest tensorem typu $(0, n)$ (czyli działa n-liniowo na $V^0 \times (V^*)^n$).

Na zakończenie proponujemy Czytelnikowi zastanowienie się nad zadaniem, które choć związane z nierównością Karamaty, nie wynika z niej bynajmniej w sposób natychmiastowy.

Zadanie 3. Niech a, b, c, x, y, z będą liczbami dodatnimi, spełniającymi warunki: $x \geqslant y \geqslant z$, $a \geqslant x$, $a^2+b^2 \geqslant x^2+y^2$ oraz $a^3+b^3+c^3 \geqslant x^3+y^3+z^3$. Udowodnić, że

$$a^6 + b^6 + c^6 \geqslant x^6 + y^6 + z^6.$$

[Literatura]

[1] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press 2007.

[2] D. Grinberg, *The Vornicu-Schur inequality and its variations*, online: `http://www.cip.ifi.lmu.de/~grinberg/VornicuS.pdf`

[3] J.L. Schiff, *The Laplace Transform: Theory and Applications*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer 1999.

Tomasz Kochanek

Autor jest adiunktem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, a także opiekunem Koła Naukowego Matematyków UŚ.

[πografia — Constantine Carathéodory]

Wśród wielu moich znajomych panuje opinia, że „wielcy matematycy” całe swoje życie spędzili nad zeszytem, z piórem w ręku i koszem w pobliżu na kolejne zużyte już arkusze papieru[5]. Co więcej, od tych samych znajomych zdarzało mi się słyszeć, że „wielcy matematycy” żyli (i żyją) w jakimś innym świecie oderwani od rzeczywistości, wracając do niej tylko z konieczności.

Poliglota, inżynier, matematyk, fizyk, z zainteresowania archeolog i zdolny zarządca to określenia z pewnością niepasujące do tego stereotypu, a to właśnie słowa charakteryzujące Constantina Carathéodory’ego. Nazwisko kojarzy się przeciętnemu studentowi matematyki lub fizyki z twierdzeniem o mierzalności w sensie miary zewnętrznej lub aksjomatycznym sformułowaniem drugiej zasady termodynamiki, ale czy to wszystko czego dokonał Carathéodory w swoim życiu?

Rodzina Constantina wywodziła się z greckich arystokratycznych rodów zamieszkałych w Konstantynopolu i będących na służbie tureckiej dyplomacji, znających ówczesne stosunki międzynarodowe, języki, wyznających przy tym poglądy podobne do polskich pozytywistów. Carathéodory urodził

[5] W odróżnieniu od filozofów, którzy, jak stary dowcip głosi, potrzebują tylko pióra i papieru.

się w 1873 roku w Berlinie, w tym czasie jego ojciec pełnił obowiązki tureckiego attaché w Niemczech. Młodość Constantin spędził w Belgii, gdzie jego ojciec dostał posadę ambasadora Turcji. Jego matka zmarła gdy miał sześć lat. Trzy lata po tym wydarzeniu młody Carathéodory rozpoczął naukę w prywatnej szkole w Brukseli. W 1886 roku został wysłany przez ojca do francuskiej szkoły średniej. Tam na lekcjach geometrii ujawniło się jego zainteresowanie matematyką, wygrał też dwukrotnie szkolny konkurs matematyczny. W 1891 zdał egzaminy końcowe i wstąpił do belgijskiej szkoły oficerskiej. Oprócz jazdy konnej i ćwiczeń wojskowych Constantin uczył się inżynierii, geometrii, mechaniki i termodynamiki. Po ukończeniu szkoły oficerskiej pracował jako inżynier na wyspie Samos przy budowie dróg, a później w Anglii i Francji. Podczas dwuletniego kontraktu w Egipcie miał okazję zobaczyć piramidy i zainteresować się archeologią, która pozostała jego pasją do końca życia.

W wolnych chwilach zajmował się matematyką, by w 1900 roku, wbrew ironicznym komentarzom odradzającym „porzucenie dobrze zapowiadającej się kariery inżyniera", podjąć studia matematyczne na Uniwersytecie w Berlinie, a dwa lata później w Getyndze. Tam miał okazję poznać wiele wybitnych osobistości ówczesnego świata matematyki i fizyki, takich jak Lipót Fejer, Feliks Klein, Herman Minkowski czy David Hilbert. Po obronie tytułu doktora matematyki kontynuował pracę naukową w Getyndze, by po roku (!) uzyskać habilitację. Przez kilka lat wykładał w Getyndze, cały czas pogłębiając swoje zainteresowania zastosowaniami matematyki w mechanice i termodynamice.

W 1908 roku Constantin poślubił swoją daleką kuzynkę, Eufrosinę Carathéodory. Dwa lata później zamieszkał z nią we Wrocławiu, gdzie objął profesurę w nowo utworzonej Wyższej Szkole Technicznej, w której powierzono mu utworzenie katedry matematyki. Matematyk wspinał się szybko po szczeblach uczelnianej kariery i już w 1913 roku został prorektorem. Zdobyte doświadczenia przydały mu się później przy reorganizacji Uniwersytetu Jońskiego. W tym czasie rozpoczął wymianę korespondencji z Albertem Einsteinem, który potem nazwał Carathéodory'ego „swoim nauczycielem".

W 1919 roku premier Grecji mianował Carathéodory'ego rektorem Uniwersytetu Jońskiego w Smyrnie. W tym czasie ujawnił się niepospolity talent organizacyjny Constantina. Matematyk z zapałem zajął się przywróceniem świetności kolebce nauki w Grecji. Niestety już po trzech latach Turcy odbili miasto. Carathéodory był jednym z ostatnich Greków, którzy pozostali w Smyrnie, a dzięki jego poświęceniu udało się ocalić znaczną część tamtejszej biblioteki przed zniszczeniem. Po utracie przez Grecję Smyrny Carathéodory wykłada przez krótki czas na Uniwersytecie i Politechnice

Ateńskiej, a po dwóch latach przenosi się jednak do Monachium, gdzie zajmuje się termodynamiką i teorią względności. Będąc od 1938 roku na emeryturze, dalej mieszka w Monachium i pomimo częstych nalotów dywanowych do końca II wojny światowej pracuje naukowo. Pomimo niebezpieczeństw podróży na terenie opętanej wojną III Rzeszy udaje się na pogrzeb Davida Hilberta w Getyndze.

Po wojnie Constantin i Eufrosina chorują. Matematyk umiera na raka wątroby w roku 1950 roku, trzy lata po śmierci swojej żony.

W ciągu swojego życia Carathéodory zajmował się również teorią miary i rachunkiem wariacyjnym, choć gdyby chcieć wymienić wszystkie zagadnienia nad którymi pracował w swoim życiu nawet w hasłach, to lista byłaby dłuższa niż ta biografia. Ciekawostką jest fakt, że znana nierówność Bellmana, tak brutalnie wbijana do głów na zajęciach z równań różniczkowych, została udowodniona właśnie przez Carathéodory'ego.

W piątą rocznicę śmierci Carathéodory'ego Albert Einstein podczas ostatniego udzielonego przez niego wywiadu powiedział: „Panowie, jest mi bardzo przykro, że widzę was gotowych do odejścia bez zadania mi najważniejszego pytania. Poprosiliście, żebym wam odpowiedział na wiele pytań, ale nikt z was nie chciał się dowiedzieć, kto był moim nauczycielem i kto pokazał mi drogę do wyższej matematyki, tak w rozwoju mojej myśli jak i badań? Aby was nie zamęczyć, powiem prosto bez jakichkolwiek szczegółów, że moim wielkim nauczycielem był nie kto inny, tylko niesamowity Grek – Constantin Carathéodory, któremu nie tylko ja osobiście, ale i matematyka, fizyka oraz mądrość XX wieku zawdzięczają wszystko".

Minstrel

[Rozumiejąc matematykę]

Jedną z podstawowych różnic pomiędzy studentem matematyki a normalnym człowiekiem jest to, że student matematyki wie, że „To widać" jest pojęciem względnym. Dla normalnego człowieka „To widać" jest zerojedynkowe – no albo widać, że gdzieś stoi drzewo, albo nie, proste. Ale na matematyce, gdy na ćwiczeniach z analizy funkcjonalnej ktoś stwierdza, że z twierdzenia Baire'a „natychmiast widać" że baza Hamela nieskończeniewymiarowej przestrzeni Banacha musi być nieprzeliczalna... Gdy na topologii „widać", że warunek T_1 jest równoważny temu, że singletony są domknięte... Gdy na algebrze „widać", że wyznacznik macierzy Vandermonde'a wynosi tyle a tyle... To nagle się okazuje, że to wcale nie tak natychmiastowo widać. Podobnie z czymś, co jest „intuicyjne". Intuicyjny jest zazwyczaj panel sterowania pralki, intuicyjnie są rozmieszczone sztućce w szufladach, ale jeśli pada stwierdzenie, że „Wszyscy intuicyjnie czujemy, że jeśli znajdziemy się w nieskończeniewymiarowej przestrzeni, to »tu wstaw liczne długie słowa, z których co jakiś czas padają stwierdzenia jak „lokalna zwartość” et caetera«”, to nagle trzy czwarte sali patrzy na siebie z powątpiewaniem. No i powstaje naturalne pytanie – jak to jest mieć tą intuicję? Jakie to uczucie rzeczywiście widzieć takie rzeczy? Co czuje człowiek, który rozumie ten cały chiński?

Mógłbym tu oczywiście zrobić minę pełną pychy i stwierdzić „To ja wam opowiem”, ale nie jestem na tyle pyszny, by twierdzić o sobie, że mogę takie rzeczy mówić. Natrafiłem jednak na takie pytanie na pewnym anglojęzycznym forum internetowym i jedna z odpowiedzi była na tyle długa i wydawała się na tyle sensowna, że pomyślałem sobie, że wartościowym byłoby zamieścić ją na łamach [Macierzatora]. Jest to odpowiedź napisana już bardziej z perspektywy naukowca, jednak wiele głoszonych tez pozostaje prawdziwych również w przypadku studentów. Zaznaczam jednak, że nie jest to moje zdanie, że ja nie uważam się za osobę upoważnioną do pouczania kogokolwiek, jak to jest rozumieć matematykę, bo nie uważam, bym rozumiał ją sam, i jeśli ktokolwiek nie zgadza się z tezami tego artykułu, to proszę nie uważać, że to ja jestem głupi. Jeśli kogoś interesowałoby źródło, zapraszam do kontaktu; ja zaś byłbym bardzo zainteresowany poznaniem zdania innych osób, doktorantów, studentów, czy pracowników naukowych na ten temat. Ale nie przedłużając, przejdźmy do odpowiedzi na pytanie: Jak to jest, rozumieć matematykę „bardzo wyższą”?

➯ **Potrafi się odpowiedzieć bez zastanowienia na wiele, wydawałoby się, trudnych pytań.** Ale to nie jest magia, tylko znajomość pewnego triku – mianowicie po usłyszeniu pytania szybko w myśli analizujemy, czy da się na nie odpowiedzieć którąś z potężniejszych metod aparatu matematycznego (argumenty przez przejścia graniczne, przez powiązania między obiektami algebraicznymi i geometrycznymi, redukcję przypadków nieskończonościowych do skończonych przez różne formy zwartości, itd.) wraz z konkretną wiedzą z danej dziedziny. Tak naprawdę takich fundamentalnych trików jest zaskakująco mało i w miarę spora lista dostępna jest na stronie `www.tricki.org/tricki/map`.

➯ **Często potrafi się ze sporym prawdopodobieństwem odpowiedzieć, czy coś jest prawdziwe czy fałszywe, nawet przed zobaczeniem ścisłego dowodu.** Jest to powodowane głównie posiadaniem sporego „katalogu” idei, powiązań i konceptów i można szybko stwierdzić, że gdyby X było fałszywe, to zrobiłby się paradoks z Y, a wiemy o Y, że jest prawdziwe, więc intuicyjnie rzecz biorąc X zapewne też. Nie chodzi o szybkie wyobrażenie sobie pełnej sytuacji i przeprowadzenie ścisłego dowodu co do przysłowiowego epsilona, ale o szybkie znalezienie kilku znajomych już rzeczy powiązanych z tą rozważaną w sposób logiczny.

- ➪ **Nie przeraża cię poczucie, że nie rozumiesz w pełni problemu który studiujesz.** Zazwyczaj jeżeli rozumiemy go w pełni, to jest on już rozwiązany i pora zająć się czymś innym. Jedną z umiejętności naukowca jest umiejętność komfortowej i produktywnej pracy, pomimo poczucia zagubienia.
- ➪ **Twoje intuicje co do problemu są produktywne i uporządkowane, więc nie tracisz czasu na bycie zdziwionym postawionym problemem.** Dla przykładu, prowadząc rozważania w wielowymiarowej przestrzeni nie próbujesz „zobaczyć" tych siedmiu czy ilu wymiarów i próbować przenieść intuicje z dwuwymiarowej płaszczyzny na rozważany przypadek. Wielu początkujących studentów ma ten problem, że rozważając przestrzenie wielowymiarowe traci mnóstwo czasu na próby zwizualizowania sobie całego problemu, mimo że nie wszystkie intuicje z geometrii dwu- czy trójwymiarowej mają w ogóle jakiekolwiek analogony w wyższych wymiarach.
- ➪ **Poznając nowe pojęcia, najpierw skupiasz się na prostych przykładach, by potem podnieść swą intuicję „poziom wyżej" do rzeczy bardziej skomplikowanych.** Wracając do geometrii, powiedzmy, że próbujemy znaleźć punkt stały jakiegoś obrotu pięciowymiarowej przestrzeni. Myśląc o tym najpierw w dwóch lub trzech wymiarach, jesteśmy w stanie stwierdzić, jakie własności owego obrotu są istotne dla naszych wyliczeń i – często – rozpisując wszystko symbolicznie stwierdzamy, że tak naprawdę liczba wymiarów nie gra w naszym rozumowaniu większej roli. Oczywiście, im dalej jesteśmy w naszych studiach matematycznych, tym trudniejsze stają się „proste przykłady" od których wychodzimy i może się okazać, że potrzebne były nam dwa lata studiów, by móc komfortowo poruszać się w tym, co teraz służy nam jako ten „prosty przykład". Wciąż jednak zasada jest ta sama - nie staramy się znikąd wyciągnąć cudownej intuicji na temat czegoś skomplikowanego, a raczej staramy się zredukować to, co jest nam nieznane, do czegoś w czym czujemy się lepiej.
- ➪ **Jedną z najdziwniejszych cech, którą niematematycy przyporządkowują matematykom, jest posiadanie jakiejś tajemniczej umysłowej zdolności, pozwalającej rozwiązać skomplikowany problem od jednego spojrzenia.** Tak naprawdę każdy po prostu atakuje problem różnymi znanymi sobie metodami, stosując je do znanych sobie prostych przypadków, starając się uzyskać wyniki częściowe lub znaleźć analogię z dziedziną w której czujemy się lepiej. Po prostu im dalej jesteśmy, tym większy mamy arsenał znanych sobie metod, potrafimy testować je szybciej (bo praktyka czyni mistrza) i może w niewielkim stopniu jesteśmy w stanie często zgadywać nieco bardziej szczęśliwie. Czasami przyjdzie jakieś nagłe olśnienie, ale najpierw trzeba położyć pod nie solidne fundamenty.

- **Pracujesz w coraz bardziej abstrakcyjnym świecie. To, co badałeś wczoraj, dziś jest jedynie szczególnym przypadkiem albo malutką częścią obiektu badań.** Dla przykładu, na analizie uczymy się o funkcjach, ale na analizie funkcjonalnej funkcje są już jedynie punktami, elementami jakiejś większej przestrzeni – niejako patrzymy na całą sytuację z większej odległości. Patrząc z tej odległości, wiele skomplikowanych tez można wygłosić w paru zdaniach, podczas gdy patrząc z bliska potrzeba by było zapisać całe tomy. To kompresowanie i uogólnianie pozwala rozważać niezwykle skomplikowane zagadnienia, używając naszej, ludzkiej, ograniczonej „mocy obliczeniowej".
- **Nie masz trudności w rozumieniu bardzo abstrakcyjnych czy technicznych wyników z różnych dziedzin, bo zazwyczaj sprowadzają się one do stosowania narzędzi matematycznych, które już znasz.** Piszący ten post ma przyjaciela, fizyka teoretycznego, który lubi mawiać, że powinny być książki „X dla matematyków", gdzie X oznacza jakąś trudną dziedzinę nauki – chemię kwantową, teorię względności, epistemologię. Książki takie byłyby krótkie i zwięzłe, bo wiele najistotniejszych pojęć byłyby dla matematyków już znane bądź proste do zrozumienia. Często założenie znajomości matematyki i biegłości w posługiwaniu się abstrakcją mogłoby uczynić wszelkie tłumaczenia w takiej książce krótszymi i bardziej eleganckimi. Oczywiście, nie oznacza to że dobry matematyk mógłby być mistrzem we wszystkim – głębsze rozumowania fizyczne czy ekonomiczne wymagają stosowania umysłowych trików, których sam matematyczny trening nikogo nie nauczy. Jednak umiejętności obliczeniowe i logicznego myślenia, nabywane przez matematyków w trakcie studiów, pozwoliłyby na stosowanie wielu „skrótów" podczas nauki tej hipotetycznej nowej dziedziny (oczywiście, tak długo, jak zachowa się wobec niej pokorę, odrzucając matematyczne przyzwyczajenia, które w danej dziedzinie okazałyby się nieprzydatne).
- **Nie masz problemu z wieloma, wydawałoby się, zupełnie różnymi metodami formułowania tego samego problemu.** Dla przykładu, wiele problemów można przedstawić w sposób bardziej algebraiczny – uzyskując konkretny algorytm czy wzór – lub bardziej „geometryczny", intuicyjny – uzyskując coś w rodzaju „obrazka". Tak naprawdę wiele najpotężniejszych narzędzi matematycznych dostarcza swoistego „słownika" do poruszania się między różnymi dziedzinami nauki. Dla przykładu, teoria Galois pozwala użyć naszej wiedzy na temat symetrii (np. osi symetrii ośmiokąta) w badaniu równań wielomianowych czwartego stopnia. Znając te różne dziedziny, dostajemy swoiste autostrady, dzięki którym badając jeden problem możemy wydostawać się z miejsca, w którym utknęliśmy, w inne, i kontynuować badania.

- **Nie przepadasz za długimi przeliczeniami.** Matematycy mogą często całymi dniami myśleć o jakimś eleganckim argumencie, który pozwoliłby im uniknąć przydługich rachunków czy ciągów prostych rozumowań, zamiast tego udowadniając daną tezę dzięki potędze jakiegoś dobrze już znanego narzędzia matematycznego. Czasem nawet wybierasz problemy na podstawie tego, czy sądzisz, że dałoby się w nich znaleźć jakieś ładne rozumowanie, a nie dowód polegający na przerachowaniu kilkunastu przypadków. G.H. Hardy napisał w swej książce *A Mathematician's Apology*:

  > *W obydwu* [*rozważanych wcześniej*] *twierdzeniach* (*przedstawionych wraz z dowodami*) *widzimy sporą dozę niespodziewania, połączonego z poczuciem czegoś, co nieuniknione. Przeprowadzane rozumowania wyglądają dziwnie i zaskakująco; użyte narzędzia wydają się być wręcz dziecinnie proste w porównaniu z tak głębokimi wynikami; nie da się jednak uciec od prawdziwości naszych wyników. Dowody nie są przesadnie skomplikowane - jeden atak wystarczy, podobnie jak w dowodach wielu innych bardzo głębokich twierdzeń, do docenienia których potrzebna jest olbrzymia matematyczna biegłość. Nie chcemy wielu „odmian" w twierdzeniu matematycznym: „wypisanie przypadków" jest jednym z najnudniejszych rodzajów rozumowania matematycznego. Dowód matematyczny powinien przypominać prostą, czystą konstelację gwiazd, a nie chaotyczne skupisko gwiazd Drogi Mlecznej. (...)* [*Rozwiązywanie problemu szachowego*] *to czysta matematyka i ma swoje zalety; jest to jednak typowo rozumowanie przez „rozważenie wszystkich przypadków"* (*które to przypadki są, tak naprawdę, bardzo do siebie podobne*)*, który to typ rozumowania spotyka się zazwyczaj z pogardą ze strony prawdziwych matematyków.*

- **Preferujesz potężne, ogólne idee rozwiązujące szereg problemów nad rozwiązaniami konkretnych zagadek.** Rzadko kiedy matematyka obchodzi odpowiedź na jakieś konkretne pytanie. Nawet takie twierdzenia, jak Wielkie Twierdzenie Fermata budzą tyle zainteresowania raczej ze względu na to, że sygnalizują nam potrzebę uzyskania nowych, potężniejszych narzędzi, by być w stanie je atakować. Najcenniejszą rzeczą nie jest odpowiedź na samo pytanie, ale to, czego się nauczymy po drodze. Matematyk szuka nowego „słownika" czy autostrady łączącej różne pojęcia naszego ideowego uniwersum. Stąd wielu matematyków nie zastanawia się w ogóle nad praktycznym czy obliczeniowym zastosowaniem ich wyników (oczywiście, jest to wadą hiperabstrakcyjnego podejścia); zamiast tego próbują znaleźć najpotężniejsze i najogólniejsze powiązania. O wadach i zaletach tego podejścia wypowiadał się również m.in. Timothy Gowers, którego zdanie można również znaleźć w Internecie.

- ➩ **Rozumienie czegoś abstrakcyjnego czy udowadnianie jakiegoś faktu staje się zadaniem przypominającym budowę.** Myśli się „Najpierw położę te fundamenty, potem zbuduję ten szkielet z tych znanych mi części, ale ściany wstawię później, potem przetestuję kolumny...”. Andrew Wiles, który dowiódł Wielkie Twierdzenie Fermata, używał analogii odkrywania nieznanego terenu:

  Chyba najlepszym opisem moich doświadczeń jako matematyka jest analogia z podróżą przez ciemną, nieznaną rezydencję. Wchodzimy do pierwszego pokoju i jest zupełnie ciemno. Chodzimy wokół, obijając się o meble, ale po jakimś czasie wiemy już dokładnie, gdzie stoi który mebel. Po sześciu miesiącach znajdujemy włącznik światła i widzimy dokładnie pokój, w którym przebywaliśmy. Więc wchodzimy do następnego pokoju i znowu jest zupełnie ciemno. Zatem każde to znalezienie włącznika jest kulminacją – i nie mogłoby istnieć bez – wielu miesięcy wcześniejszego obijania się o meble w ciemności.

- ➩ **Słuchając seminarium czy czytając pracę, nie czujemy się aż tak „zablokowani”**, ponieważ mamy coraz więcej praktyki w rozkładaniu idei na części, traktując rozumowania czy przeliczenia których nie potrafimy zrozumieć od razu jako „czarne skrzynki” i i tak biorąc pod uwagę to, co z nich wynika. Czasami można dawać stwierdzenia, o których wiemy, że są prawdziwe, lub dobrze intuicyjnie je rozumiemy, bez znania wszystkich stojących za nimi szczegółów. Często można zauważyć, jakie części danej dziedziny są delikatne czy najbardziej interesujące, po wysłuchaniu jednego tłumaczenia na bardzo wysokim poziomie.
- ➩ **Potrafisz tworzyć nowe definicje i pytania podczas rozważania jakiegoś nowego uogólnienia.** Jedną z rzeczy, których uczymy się bardzo późno (często dopiero przy rozpoczynaniu pracy badawczej) jest tworzenie dobrych, użytecznych definicji. Często można usłyszeć od ludzi znających się na matematyce, ale nie zajmujących się nią profesjonalnie (np. zarabiających na pisaniu artykułów popularnomatematycznych), że w czasie swych studiów byli bardzo dobrzy w rozwiązywaniu trudnych zadań ze zbioru, ale czuli się zagubieni, gdy przedstawiło im się matematyczną strukturę i prosiło o udowodnienie jakichś interesujących o niej faktów. Taka umiejętność oznacza umiejętność formułowania definicji i stawiania konkretnych hipotez, które inni matematycy uznają za ciekawe lub pouczające. Jest to trochę jak próba wymyślenia dobrej historii kryminalnej, mając dane miejsce wydarzeń. W odróżnieniu od normalnego detektywa, najpierw musimy zdecydować, co będzie naszą „zbrodnią” (tzn. interesującym problemem); następnie musimy wymyślić „wskazówki”, które nas do niej doprowadzą, wychodząc jedynie od aksjomatów. By to zrobić, stosujemy analogię z innymi znanymi kryminałami (matematycznymi teoriami) i nasz własny gust

w decydowaniu, co jest interesujące i głębokie. Trudno opisać, jak ten proces dokładnie przebiega, można jednak z dużym prawdopodobieństwem stwierdzić, że to jest właśnie najbardziej wspólna dla wszystkich matematyków rzecz.

➩ **Łatwo irytują cię braki w precyzji w mówieniu o problemie obliczeniowym czy logicznym.** Głównie dlatego, że opanowałeś już umiejętność szybkiego wymyślania kontrprzykładów, czyniących niekonkretny problem w oczywisty sposób fałszywym.

➩ **Jednocześnie nie masz nic przeciwko brakom w precyzji czy „machaniu rękami" w dziedzinach które znasz, bo łatwo Ci dodać szczegóły samemu.** Jak pisze Terence Tao,

> [*Gdy już nauczymy się myśleć w sposób rygorystyczny,*] *nadchodzi etap „post-rygorystyczny", kiedy już czujemy się komfortowo we wszystkich konkretnych podwalinach naszej dziedziny i jesteśmy gotowi by jeszcze raz przyjrzeć się i poprawić nasze nieprecyzyjne intuicje, jakie mieliśmy na ten temat wcześniej; tym razem jednak nasza intuicja jest solidnie podbudowana konkretną wiedzą.* (*Dla przykładu, na tym etapie nie mielibyśmy problemu z przeprowadzaniem obliczeń w rachunku wektorowym poprzez analogie z rachunkiem skalarnym, nie przeszkadza nam nieformalne użycie liczb nieskończenie małych, notacji dużego O i tak dalej, bo w razie czego potrafimy wszystkie te nieformalne zapiski przekształcić w szczegółowy i rygorystyczny dowód.*) *Teraz kładziemy akcent na zastosowania, intuicję i ogólny obraz. Ten etap przychodzi pod koniec studiów magisterskich i w czasie dalszej pracy naukowej.*

Dla przykładu, pojęcie, do zrozumienia którego za pierwszym razem potrzebowaliśmy wielu godzin („dla każdego epsilona istnieje delta, że to stwierdzenie zachodzi") staje się tak naturalnym elementem naszych późniejszych rozumowań, że nawet się nad tym specjalnie nie zatrzymujemy.

➩ Istotnym spostrzeżeniem jest, że matematycy też są ograniczeni tymi samymi ograniczeniami, co inni. Nie są intelektualnymi superherosami. Często mają problemy z przyjmowaniem nowych pojęć czy sposobów rozumowania (nawet matematycznego), które nie jest „ich". Mogą bronić swoich tez, nie szanować cudzych i czepiać się szczegółów. Powyżej starałem się[6] podsumować, jakie to uczucie pracować i myśleć matematycznie, nie zastanawiając się nad wadami osobistymi matematyków czy na polityce różnych dziedzin matematyki. Są to osobne zagadnienia, warte osobnych odpowiedzi.

[6] Autor posta.

➩ **Masz pokorę wobec swojego stanu wiedzy, świadom, jak słaba jest matematyka, i nie przeszkadza Ci to, że nie jesteś w stanie stwierdzić nic inteligentnego na temat większości problemów.** Tak naprawdę jest bardzo niewiele matematycznych pytań, na które mamy w miarę wnikliwe odpowiedzi. Jest jeszcze mniej takich, na które każdy matematyk jest w stanie udzielić wnikliwej odpowiedzi. Dobry student matematyki po studiach licencjackich byłby w stanie wypisać setki pytań, na które nawet najlepsi matematycy nie byliby w stanie udzielić odpowiedzi (informatyk teoretyczny Richard Lipton podaje kilka takich przykładów na swym blogu `http://rjlipton.wordpress.com/2009/12/26/mathematical-embarrassments/`).
Dzięki temu nie mamy problemu z byciem „zagiętym” przez dane pytanie; mamy wyczucie na temat swoich umiejętności matematycznych i tego, jakie problemy da się rozwiązać, a które są daleko poza naszym zasięgiem. To wyczucie, jakkolwiek upokarzające, uwalnia nas też od zawstydzenia, bo ma się świadomość, że zna się najpotężniejszy dostępny obecnie aparat do zajmowania się danym problemem.

Na zakończenie chciałbym jeszcze raz dodać, że powyższa lista nie została absolutnie skompilowana przeze mnie. Słowa autora starałem się przetłumaczyć jak najwierniej, pozwalając sobie jedynie na drobne zmiany natury językowej.

Niewinny Rosomak

[Ogłoszenie KNM]

Miło mi poinformować, że w maju będziemy gościć w Instytucie Matematyki UŚ Profesora Wolfganga Reichela z Karlsruhe Institute of Technology w Niemczech. Profesor Wolfgang Reichel to wybitny specjalista z zakresu równań różniczkowych cząstkowych, zatrudniony w Institute of Analysis KIT. Jest on szczególnie bliski dla osób z naszego Instytutu: studenci z Koła Naukowego Matematyków UŚ znają go z matematycznego kursu intensywnego, który odbył się podczas ubiegłych wakacji; tam też narodził się pomysł zaproszenia go do Katowic. Ku naszej radości, Pan Profesor przyjął nasze zaproszenie. W zwiazku z jego wizytą zaplanowaliśmy kilka wykładów oraz spotkań; ich szczegółowy plan można znaleźć na stronie Koła (`www.knm.katowice.pl`). Szczególnie gorąco zachęcamy wszystkich do udziału w wykładzie *Analysis speeds you up – the Brachistochrone problem*, adresowanym szczególnie do studentów (ale nie tylko). Wykłady Profesora Reichela podczas kursu intensywnego wspominamy jako bardzo ciekawe, przejrzyste i dowcipne – tym goręcej zachęcamy wszystkich do aktywnego udziału w wydarzeniach organizowanych podczas wizyty Pana Profesora.

Pan Profesor Wolfgang Reichel sprawił nam kilka miesięcy temu dużą i przemiłą niespodziankę: na okładkę pierwszego numeru [Macierzatora] w tym roku akademickim wybraliśmy jego rysunek. Ku naszemu radosnemu zaskoczeniu, Pan Profesor wkleił fragment okładki oraz opisał całą sytuację na swojej oficjalnej instytutowej stronie internetowej[7]; poniżej prezentujemy zrzut ekranu.

Chciałabym w tym miejscu gorąco podziękować Panu Profesorowi Romanowi Gerowi, Dyrektorowi Instytutu Matematyki UŚ, za ogromną życzliwość, nieocenioną pomoc oraz bardzo przychylne ustosunkowanie się do naszej inicjatywy.

Joanna Zwierzyńska

[7] `http://www.math.kit.edu/iana2/~reichel/`

[O gęstości obrazu liczb naturalnych poprzez funkcję sinus]

Fakt, że zbiór $\sin \mathbb{N}$ jest gęstym podzbiorem przedziału $[-1, 1]$, jest powszechnie znany. Jednak jak to z powszechnie znanymi faktami bywa, mało kto pamięta jak je udowodnić.

W tym artykule przedstawimy dowód pewnego ogólniejszego faktu, mianowicie udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1. *Jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest funkcja ciągłą o okresie, który jest liczbą niewymierną, to $f(\mathbb{N})$ jest gęstym podzbiorem przeciwdziedziny funkcji f.*

Zanim przejdziemy do dowodu udowodnimy dwa lematy.

Lemat 2. *Niech $T > 1$ będzie liczbą niewymierną oraz niech $0 < x_1 < x_0$ i $T = \frac{x_0}{x_1}$. Wtedy ciąg*

$$x_{m+2} = x_m - \left\lfloor \frac{x_m}{x_{m+1}} \right\rfloor x_{m+1} \quad (m \in \mathbb{N}_0)$$

jest poprawnie określony oraz zbieżny do 0.

Dowód. Ustalmy $k \in \mathbb{N}$. Załóżmy, że $0 < x_{k+1} < x_k$ oraz liczba $\frac{x_k}{x_{k+1}}$ jest niewymierna. Na mocy określenia ciągu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ mamy

$$x_{k+2} = x_k - \left\lfloor \frac{x_k}{x_{k+1}} \right\rfloor x_{k+1}.$$

Zauważmy, że liczba

$$\frac{x_{k+2}}{x_{k+1}} - \left\lfloor \frac{x_k}{x_{k+1}} \right\rfloor \in (0, 1)$$

jest liczbą niewymierną. Ponadto $0 < x_{k+2} < x_{k+1}$. Pokazaliśmy zatem, że liczba $\frac{x_{m+1}}{x_{m+2}}$ jest niewymierna oraz $0 < x_{m+2} < x_{m+1}$ dla dowolnej liczby $m \in \mathbb{N}_0$. Zauważmy, że

$$x_{m+2} = x_m - \left\lfloor \frac{x_m}{x_{m+1}} \right\rfloor x_{m+1} \leqslant x_m - x_{m+1} < x_m - x_{m+2}, \quad (m \in \mathbb{N}_0).$$

A zatem $x_{m+2} < \frac{x_m}{2}$ $(m \in \mathbb{N}_0)$. Powyższa nierówność oraz fakt, że ciąg $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ jest malejący dowodzi, że $x_m \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$. $\square$

Lemat 3. *Przy oznaczeniach i założeniach z lematu 2 niech $x_0 = T$ oraz $x_1 = 1$. Wtedy dla dowolnej liczny naturalnej $m \geqslant 2$ istnieją takie liczby całkowite a_m oraz b_m, że $x_m = a_m T + b_m$. Ponadto $\mathrm{sgn} a_m = (-1)^m$ oraz $\mathrm{sgn} b_m = (-1)^{m+1}$ $(m \geqslant 2)$.*

Dowód. Niech $a_2 = 1$, $b_2 = -\lfloor T \rfloor$, $a_3 = -\left\lfloor \frac{x_1}{x_2} \right\rfloor$ oraz $b_3 = 1 + \left\lfloor \frac{x_1}{x_2} \right\rfloor \lfloor T \rfloor$ oraz dla $m \geqslant 2$ połóżmy

$$a_{m+2} = a_m - \left\lfloor \frac{x_m}{x_{m+1}} \right\rfloor a_{m+1} \text{ oraz } b_{m+2} = b_m - \left\lfloor \frac{x_m}{x_{m+1}} \right\rfloor b_{m+1}.$$

Łatwo sprawdzić, że zdefiniowane powyżej liczby spełniają tezę lematu. □

Przejdziemy teraz do dowodu twierdzenia.

Dowód. (twierdzenia 1) Pokażemy, że dla dowolnej liczby rzeczywistej $y \in f(\mathbb{R})$ istnieje taki ciąg $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ liczb naturalnych, że $y = \lim_{k \to \infty} f(n_k)$.

Niech T będzie okresem funkcji f. Możemy założyć, że $T > 1$. Niech $x \in (0, T]$, będzie takie, że $f(x) = y$. Dla $k \in \mathbb{N}_0$, niech $c_k = x - \left\lfloor \frac{x}{x_k} \right\rfloor x_k$, gdzie ciąg $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ będzie taki jak w lemacie 2. Zauważmy, że

$$\left\lfloor \frac{x}{x_k} \right\rfloor \leqslant \frac{x}{x_k} \leqslant \left\lfloor \frac{x}{x_k} \right\rfloor + 1,$$

zatem $0 \leqslant c_k \leqslant x_k$ $(k \in \mathbb{N}_0)$, więc $c_k \to 0$.

Dla $k \in \mathbb{N}$, zdefiniujmy

$$n_k = \left\lfloor \frac{x}{x_{2k-1}} \right\rfloor b_{2k-1} \text{ oraz } m_k = \left\lfloor \frac{x}{x_{2k-1}} \right\rfloor a_{2k-1},$$

gdzie ciągi $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ i $(b_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ są takie jak w lemacie 3.

Zauważmy, że $x - c_{2k-1} = n_k + T \cdot m_k$ $(k \in N)$. Stąd

$$f(n_k) = f(x - c_{2k-1} - T \cdot m_k) = f(x - c_{2k-1}) \to_{k \to \infty} = f(x) = y. \quad \square$$

vil

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Piotr Idzik, Marcin Jenczmyk,
Mateusz Jurczyński, Tomasz Kochanek, Beata Łojan
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

kwiecień 2012

[Kącik TEXowy część 7]

Matematyka — definicja, twierdzenie, dowód

Przechodzimy do rzeczy poważnych. W tej części powiemy jak estetycznie umieszczać w tekście definicje czy twierdzenia oraz kontrolować ich wygląd — omówimy służące do tego polecenia. Na koniec pokażemy jak zdefiniować własny styl dla tego typu środowisk.

Beata Łojan (b.lojan@knm.katowice.pl)

[Definicja, twierdzenie, dowód]

W przypadku tekstów matematycznych zachodzi (o dziwo często) potrzeba wprowadzenia w tekście definicji, twierdzeń itp. Aby w efekcie końcowym uzyskać czytelnie i estetycznie wyglądające formuły należy skorzystać z pakietu `amsthm`. Dostarcza nam on poleceń pozwalających definiować środowiska do wprowadzania formuł oraz określać ich styl.

Do definiowania wszelkiego rodzaju środowisk (typu `theorem`) do składu twierdzeń, definicji itp. służy nam polecenie `\newtheorem`, które umieszczamy w preambule naszego dokumentu.

```
\newtheorem{nazwa_srodowiska}[nazwa_inna]{naglowek}[numeracja]
```

`nazwa_srodowiska` nazwa tworzonego otoczenia;

`nazwa_inna` nazwa innego otoczenia zdefiniowanego za pomocą polecenia `\newtheorem`. Jest to argument opcjonalny (można go pominąć); powoduje, że nowo tworzone środowisko będzie miało wspólną numerację ze środowiskiem `nazwa`;

`naglowek` to co pojawi się w wydruku, za każdym razem, gdy użyjemy środowiska `nazwa_srodowiska`;

`numeracja` określa w jaki sposób mają być numerowane kolejne wywołania otoczenia; może przyjmować wartość np. `part`, `chapter`, `section`... Przykładowo jeśli wpiszemy tu `chapter`, to w każdym kolejnym rozdziale środowiska będą numerowane od początku. Domyślnie każde środowisko utworzone za pomocą polecenia `\newtheorem` jest numerowane osobno oraz w sposób ciągły w całym dokumencie.

przyklad1.tex

```
\newtheorem{tw}{Twierdzenie}[section]
```

Powyższy przykład spowoduje utworzenie środowiska `tw`, które będzie wyglądało następująco:

przyklad2.tex

```
\begin{tw}[opis]
To jest przykład bardzo
ważnego twierdzenia...
\end{tw}
```

przyklad2.pdf

Twierdzenie 1 (opis)**.** To jest przykład bardzo ważnego twierdzenia...

Argument *opis* jest nieobowiązkowy; pozwala on na umieszczanie dodatkowych opisów przy twierdzeniach (np. nazwiska autora, daty itp.).

Jak widać domyślnie w tak zdefiniowanym środowisku nagłówek i numer są pogrubione, zaś treść wewnątrz środowiska złożona jest kursywą. Przyjęło się jednak, aby twierdzenia, lematy były składane innym krojem pisma niż definicje czy uwagi. W pakiecie `amsthm` zdefiniowane są trzy style, dzięki którym możemy wpływać na krój pisma w środowiskach `theorem`:

❶ `plain` – styl domyślny: nagłówek i numer są pogrubione, a treść złożona kursywą;
❷ `definition` – nagłówek i numer są pogrubione, a treść złożona pismem prostym;
❸ `remark` – nagłówek i numer złożone kursywą, treść pismem prostym;

Aby poszczególne środowiska były składane w wybranym przez nas stylu, należy ich definicje odpowiednio pogrupować i każdą taką grupę poprzedzić poleceniem `\theoremstyle{`*styl*`}`

Jak już wspomnieliśmy domyślnie wszystkie tak stworzone środowiska są numerowane; jeśli z jakiś przyczyn chcemy, aby któreś środowisko nie było numerowane musimy użyć (podobnie jak w przypadku nienumerowanych rozdziałów) gwiazdki:

tw_nonumber.tex

```
\newtheorem*{twn}{Twierdzenie}
```

No dobrze definicje, twierdzenia, uwagi mamy z głowy, a co jeśli zechcemy coś udowodnić? Nic prostszego. W pakiecie `amsthm` zostało zdefiniowane otoczenie `proof`, które służy do składania dowodów. Po wywołaniu środowiska pojawi się napis *Dowód*, który będzie złożony kursywą, treść złożona będzie pismem prostym, a na koncu pojawi □.

Czas na bardziej rozbudowany przykład, który dokładniej zobrazuje nam działanie powyższych poleceń. Przykładowo umieszczając w preambule naszego dokumentu poniższe instrukcje, tworzymy pięć nowych środowisk — `twi`, `lem`, `wn`, `defi`, `prz`. Jak ich używać oraz efekt ich działania możemy zobaczyć na następnej stronie.

twierdzenia_preambula.tex

```
\theoremstyle{plain}
\newtheorem{twi}{Twierdzenie}[chapter]
\newtheorem{lem}[tw]{Lemat}[chapter] %numeracja wspólna z twierdzeniami
\newtheorem*{wn}{Wniosek} %brak numeracji
\theoremstyle{definition}
\newtheorem{def}{Definicja}[chapter]
\theoremstyle{remark}
\newtheorem{prz}{Przykład}%numeracja ciągła w całym dokumencie
```

twierdzenia_dokument.tex

```
\begin{twi}[Pitagorasa]W dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości
przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.\end{twi}
\begin{lem}Jest to pierwszy lemat, jednak ma numer dwa, ponieważ ma wspólną
numerację z twierdzeniami.\end{lem}
\begin{wn}Wnioski nie będą numerowane.\end{wn}
\begin{defi}To przykładowa definicja.\end{defi}
\begin{prz}To jest przykład, który pokazuje zastowanie stylu remark.\end{prz}
\begin{twi}To kolejne twierdzenie...\end{twi}
\begin{proof}Było ono potrzebne by pokazać działanie środowiska proof.\end{proof}
```

twierdzenia_dokument.pdf

Twierdzenie 7.1 (Pitagorasa)**.** *W dowolnym trójkącie prostokątnym suma kwadratów długości przyprostokątnych jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej.*

Lemat 7.2. *Jest to pierwszy lemat, jednak ma numer dwa, ponieważ ma wspólną numerację z twierdzeniami.*

Wniosek. *Wnioski nie będą numerowane.*

Definicja 7.1. To przykładowa definicja.

Przykład 7.1. To jest przykład, który pokazuje zastowanie stylu remark.

Twierdzenie 7.3. *To kolejne twierdzenie...*

Dowód. Było ono potrzebne by pokazać działanie środowiska proof. □

[Własny styl twierdzeń]

Pakiet `amsthm` dostarcza nam również instrukcji `\newtheoremstyle`; polecenie to pozwala na zdefiniowanie własnego stylu dla środowisk tworzonych za pomocą polecenia `\newtheorem`. Instrukcja `\newtheoremstyle` ma maksymalną ilość argumentów – dziewięć – i jest postaci:

wlasny_styl_def.tex

```
\newtheoremstyle{nazwa_stylu}{odleglosc_przed}{odleglosc_po}
{font_tresc}{wciecie}{font_naglowka}{znak_po_naglowku}
{odleglosc_po_naglowku}{inne_ust_naglowka}
```

`nazwa_stylu` nazwa nowego stylu – argument polecenia `\theoremstyle`;

`odleglosc_przed` określa pionową odległość przed środowiskiem (puste pole oznacza wartość 0pt);

`odleglosc_po` określa pionową odległość po środowisku (puste pole oznacza wartość 0pt);

`font_tresc` określa jakim fontem ma być złożony tekst wewnątrz środowiska;

`wciecie` określa odległość w jakiej znajduje się tekst nagłówka od lewego marginesu;

`font_naglowek` określa jakim fontem ma być złożony tekst nagłówka;

`znak_po_naglowku` określa ciąg znaków, który zostanie wstawiony po nagłówku;

`odleglosc_po_naglowku` określa poziomą odległość między tekstem nagłówka, a treścią środowiska; przykładowo znak spacji oznacza normalną przerwę między wyrazami, a `\newline` powoduje, że treść środowiska będzie składana od nowej linii;

Parametr `inne_ust_naglowka` pozwala nam wpłynąć na wygląd poszczególnych elementów nagłówka: nazwę, numer, oraz opis. Poszczególne elementy opisują odpowiednio instrukcje: `\thmname`, `\thmnumber`, `\thmnote`.

Spróbujmy zatem zdefiniować własny styl, w którym treść środowiska będzie rozpoczynała się od nowej linii, nagłówek będzie składany kapitalikami, a treść środowiska kursywą oraz po nagłówku pojawi się wielokropek.

mojstyl.tex

```
\newtheoremstyle{mojstyl}{}{}{\itshape}{0pt}{\scshape}{...}{\newline}
{{\thmname{#1 }}{\thmnumber{#2}}{\thmnote{ (#3)}}}
\theoremstyle{mojstyl}
\newtheorem{mojetw}{MojeTwierdzenie}
```

mojstyl.pdf

MOJETWIERDZENIE 1...
To jest przykład twierdzenia w nowym stylu.

Teraz coś trudniejszego. Zdefiniujemy styl w którym nagłówek będzie złożony kapitalikami, treść środowiska pismem maszynowym, numer środowiska będzie w nawiasach okrągłych, zaś dodatkowy opis będzie pogrubiony oraz umieszczony między < >. Ponadto treść środowiska rozpocznie się od nowej linii, a po nagłówku w odstępie 2cm pojawi sie napis LaTeX.

mstyl.tex

```
\newtheoremstyle{mstyl}{0pt}{0pt}{\ttfamily}{0pt}{\scshape}
{\hspace*{2cm}\LaTeX}{\newline}
{{\thmname{#1 }}{\thmnumber{(#2)}}{\thmnote{ \bfseries<#3>}}}
\theoremstyle{mstyl}
\newtheorem{mtw}{MojeTw}
```

mstyl.pdf

MOJETW (7.1) **<DODATKOWY OPIS>** LaTeX
`To jest przykład bardzo dziwnego stylu. Obrazującego możliwośći polecenia \newtheoremstyle`

Jak widać możliwe jest tworzenie najróżniejszych styli i dostosowanie wyglądu środowisk do własnych potrzeb.

Zdefiniowane jest również polecenie `\swapnumbers`, które powoduje, że po wywołaniu środowiska najpierw pojawi się numer a dopiero potem nagłówek.

number.tex

```
\swapnumbers
\newtheoremstyle{number}{0pt}{0pt}{\ttfamily}{0pt}{\bfseries}{ }{\newline}
{{\thmname{#1 }}{\thmnumber{#2}}{\thmnote{#3}}}
\theoremstyle{number}
\newtheorem{numberprz}{MójPrzykład}[chapter]
```

number.pdf

7.1 MójPrzykład
`To jest przykład stylu obrazującego działanie polecenia \swapnumbers`

* * *