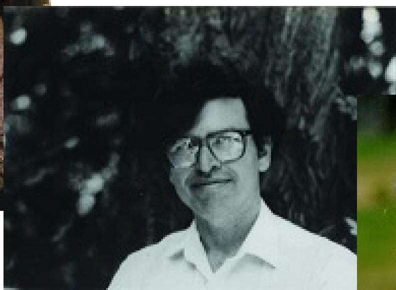
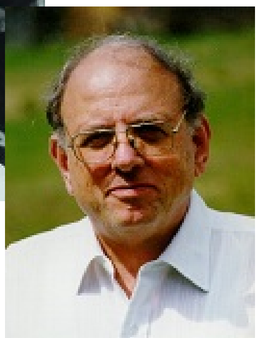
[MACIERZATOR50]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Friedrich Hirzebruch [1927– 2012]



William Thurston [1946-2012]



Joram Lindenstrauss [1936-2012]

Witamy w listopadowym numerze [MACIERZATORa]!

Oddajemy w Państwa ręce już pięćdziesiąty numer [Macierzatora]. Z okazji naszego małego jubileuszu proponujemy Państwu konkurs – zmierzenie się z wybranymi zagadkami matematycznymi, zaczerpniętymi z *Gabinetów matematycznych zagadek* profesora Iana Stewarta. Dwie osoby nagrodzimy kompletem obu *Gabinetów...*.

Tradycyjnie już w listopadzie wspominamy tych, którzy odeszli w ostatnich miesiącach. Centralną postacią numeru jest Joram Lindenstrauss, wybitny matematyk specjalizujący się w teorii przestrzeni Banacha – zapraszamy Państwa do lektury artykułu, przybliżającego jego wyjątkowy dorobek naukowy. Kontynuujemy cykl recenzji książek popularyzujących matematykę, a także proponujemy Państwu kolejną część *Kącika TEXowego*. Zachęcamy również gorąco do wzięcia udziału w corocznej zbiórce mikołajkowej, organizowanej przez KNM.

Dziękujemy Państwu za bycie z nami przez te pięćdziesiąt numerów – i zapraszamy na kolejne.

Redakcja [Macierzatora]

ISSN 2083-9774

[Joram Lindenstrauss (1936–2012)]

Dnia 29 kwietnia 2012 r., po ciężkiej chorobie, zmarł Joram Lindenstrauss, światowej sławy matematyk izraelski, znany głównie ze swojego ogromnego wkładu w liniową i nieliniową teorię przestrzeni Banacha. Był profesorem Instytutu Matematyki im. Alberta Einsteina w Uniwersytecie Hebrajskim w Jerozolimie, na którym w 1954 r. rozpoczął studia a w 1962 r. obronił rozprawę doktorską, dotyczącą problematyki przedłużania operatorów zwartych, napisaną pod kierunkiem Aryeha Dvoretzky'ego i Branko Grünbauma. W latach 1962–65, tj. bezpośrednio po doktoracie, pracował w Stanach Zjednoczonych (Uniwersytet Yale i Uniwersytet Waszyngtoński w Seattle). Resztę swojej kariery naukowej związał z Uniwersytetem Hebrajskim, wizytując jednak szereg uczelni zagranicznych, w tym Uniwersytet Kalifornijski w Berkeley i Uniwersytet Teksański w Austin.

W 1997 roku, jako pierwszy matematyk spoza Polski, został uhonorowany przez Polską Akademię Nauk Medalem im. Stefana Banacha. Wspólnie z Liorem Tzafririm był autorem zaliczanego dziś do klasyki podręcznika *Classical Banach Spaces* ([29], [30]). Truizmem jest stwierdzenie, że trudno spośród ponad stu artykułów naukowych Lindenstraussa wybrać kilka, których krótki opis mógłby w jakikolwiek sposób dać pełny obraz jego dorobku naukowego. Omówimy jednak kilka tych, jak się wydaje, najbardziej fundamentalnych, próbując choć trochę przybliżyć czytelnikowi sylwetkę tego wybitnego matematyka.

Nie sposób nie zacząć od najbardziej spektakularnego twierdzenia Lindenstraussa, udowodnionego wspólnie z Tzafririm [28] i opublikowanego w roku 1971. Rezultat ten był kompletnym rozwiązaniem problemu postawionego jeszcze przez Banacha i Mazura w roku 1930. Przypomnijmy, że domkniętą podprzestrzeń (liniową) Y przestrzeni Banacha X nazywamy *komplementarną*, jeżeli istnieje taka domknięta podprzestrzeń $Z \subset X$, że $X = Y + Z$ oraz $Y \cap Z = \{0\}$. Równoważnie – jeżeli istnieje ciągły rzut z X na Y, tj. liniowy i ograniczony operator surjektywny $\pi\colon X \to Y$, spełniający $\pi \circ \pi = \pi$. Jak wiadomo, specyficzna struktura przestrzeni Hilberta gwarantuje, że każda domknięta podprzestrzeń takiej przestrzeni jest komplementarna. Fakt ten znany jest jako twierdzenie o rzucie prostopadłym. Stosowną podprzestrzeń $\mathcal{Z}$, dopełniającą daną podprzestrzeń $\mathcal{Y}$ przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, można zdefiniować jawnie, wiedząc, że dowolną bazę ortonormalną $\{e_i\}_{i\in I}$ przestrzeni $\mathcal{Y}$ da się uzupełnić do bazy ortonormalnej $\{e_i\}_{i\in I} \cup \{f_j\}_{j\in J}$ przestrzeni $\mathcal{H}$. Wystarczy oczywiście określić wtedy

$\mathcal{Z}$ jako domknięcie przestrzeni rozpiętej przez $\{f_j\}_{j\in J}$. Naturalne pytanie, postawione w tym kontekście przez Banacha i Mazura, można wysłowić następująco: czy istnieją przestrzenie Banacha, nieizomorficzne z przestrzeniami Hilberta (zauważmy, że własność komplementarności jest niezmiennicza względem izomorfizmów), których każda podprzestrzeń jest komplementarna? Okazuje się, że nie, ale na taką odpowiedź trzeba było czekać 40 lat.

Twierdzenie 1 (Lindenstrauss, Tzafriri 1971)**.** *Jeżeli każda domknięta podprzestrzeń przestrzeni Banacha X jest w niej komplementarna, to X jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta.*

Twierdzenie to nie jest łatwe dla większości – nawet bardzo szczególnych – przypadków, np. dla przestrzeni ℓ_p dla $p \neq 2$. Fakt, że każda z tych przestrzeni zawiera podprzestrzeń niekomplementarną został wykazany przez Murraya w 1937 r. Innym szczególnym przypadkiem jest twierdzenie Banacha-Mazura o tym, że żadna podprzestrzeń $C[0,1]$, izomorficzna z ℓ_1 bądź $L_1(0,1)$ (a takie istnieją, jako że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha zanurza się w $C[0,1]$), nie jest komplementarna.

Dowód twierdzenia Lindenstraussa-Tzafririego to efektowne połączenie zaawansowanych technik geometrii przestrzeni Banacha oraz ujęcia „lokalnego" teorii przestrzeni Banacha. Składa się zasadniczo z dwóch kroków.

Krok 1. Jeżeli X jest przestrzenią Banacha, której każda domknięta podprzestrzeń jest komplementarna, to istnieje taka stała $\lambda < \infty$, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni X jest λ-komplementarna (tzn. istnieje rzut o normie niewiększej od λ).

W dowodzie tego faktu kluczową rolę gra piękne, geometryczne twierdzenie Kadetsa-Snobara [17], wedle którego każda n-wymiarowa podprzestrzeń F dowolnej przestrzeni Banacha jest $\sqrt{n}$-komplementarna. Oszacowanie normy projekcji zależy, jak widać, tylko od wymiaru F i nie jest tu istotne, jak bardzo egzotyczny jest akurat kształt kuli jednostkowej B_F w przestrzeni F. Dzieje się tak za sprawą konstrukcji tzw. *elipsoidy Johna* (ogólnie przez *elipsoidę* rozumiemy kulę w skończenie wymiarowej przestrzeni Banacha wyznaczoną przez normę pochodzącą od jakiegoś iloczynu skalarnego), która jest elipsoidą o maksymalnej (n-wymiarowej) objętości, zawartą w kuli jednostkowej B_F. Oznaczmy tę elipsoidę przez $\mathcal{E}$. Jej istnienie wynika ze zwartości kuli jednostkowej w przestrzeniach skończenie wymiarowych, a najważniejszą jej własnością jest to, że generuje ona iloczyn skalarny – a przezeń także pewną normę euklidesową $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ – na przestrzeni F, która spełnia oszacowania $\|x\|_F \leqslant \|x\|_{\mathcal{E}} \leqslant \sqrt{n}\|x\|_F$. Stąd z kolei wynika, że wszystkie n-wymiarowe przestrzenie Banacha są bliskie przestrzeniom Hilberta z dokładnością do $\sqrt{n}$. Jeżeli bowiem rozważymy przestrzeń Hilberta $E = (F, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$, to izomorfizm identycznościowy $I\colon F \to E$ spełnia

$\|x\|_F \leqslant \|I(x)\|_E \leqslant \sqrt{n}\|x\|_F$. Zamiast E możemy w istocie wziąć kanoniczną przestrzeń euklidesową ℓ_2^n, bowiem każde dwie przestrzenie Hilberta, tego samego wymiaru, są izometryczne. W konsekwencji, jeżeli $d(X,Y)$ oznacza *odległość Banacha-Mazura* między dwiema izomorficznymi przestrzeniami Banacha X i Y, określoną wzorem

$$d(X,Y) = \inf\big\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \;\big|\; T\colon X \to Y \text{ jest izomorfizmem}\big\},$$

to twierdzenie o elipsoidzie Johna mówi dokładnie tyle, że $d(F,\ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$ dla każdej n-wymiarowej przestrzeni Banacha F. W skrajnych przypadkach $F = \ell_\infty^n$ (norma maksimum) oraz $F = \ell_1^n$ (norma sumy modułów) nierówność ta staje się równością. Ogólniej, dla nieskończenie wymiarowych przestrzeni Banacha X, symbolem d_X oznaczymy odległość $d(X,\mathcal{H})$ (być może równą ∞), gdzie $\mathcal{H}$ jest przestrzenią Hilberta o tej samej gęstości (topologicznej), co przestrzeń X. Oszacowanie wartości d_X to drugi krok w dowodzie twierdzenia Lindenstraussa-Tzafririego.

Krok 2. Jeżeli X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią Banacha, dla której istnieje taka stała λ, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni X jest w niej λ-komplementarna, to X jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta, przy czym $d_X \leqslant 2^9\lambda^4$.

Takie właśnie oszacowanie było podane w oryginalnej pracy Lindenstraussa i Tzafririego [28]. Zostało ono dwa lata później ulepszone do $8\lambda^2$ przez M.I. Kadetsa i Mitjagina [17], po czym Figiel [10] zauważył, że można w istocie uzyskać $d_X \leqslant 4\lambda^2$. Z drugiej strony, Kakutani [18] już w 1939 roku udowodnił, że jeżeli $\dim X \geqslant 3$ oraz każda dwuwymiarowa podprzestrzeń X jest 1-komplementarna, to X jest izometrycznie izomorficzna z przestrzenią Hilberta, tzn. $d_X = 1$. Wynik ten umotywował hipotezę postawioną przez Kadetsa i Mitjagina, mówiącą, że d_X, traktowana jako funkcja zmiennej λ, jest ciągła w punkcie $\lambda = 1$. Innym pytaniem było, czy prawdziwe jest oszacowanie $d_X \leqslant \lambda^2$. Dowód hipotezy Kadetsa-Mitjagina, a także negatywną odpowiedź na pytanie przez nich postawione, uzyskał Kalton [19] w roku 2008. Pokazał on, że dla $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$, i przy warunkach opisanych powyżej, zachodzi nierówność $d_X \leqslant 1 + C\sqrt{\lambda - 1}$, gdzie $C < \infty$ jest pewną stałą uniwersalną. Co więcej postać tego oszacowania jest najlepsza z możliwych, więc przynajmniej dla $1 \leqslant \lambda \leqslant 2$ nie można żądać, aby $d_X \leqslant \lambda^2$.

Dowód nierówności podanej przez Lindenstraussa i Tzafririego zasadza się na ujęciu lokalnym, które polega na wykazaniu, że X jest $2^9\lambda^4$-reprezentowalna (ang. *crudely finitely representable*) w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ w tym sensie, że dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $F \subset X$ istnieje taka podprzestrzeń $E \subset \mathcal{H}$, że $d(E,F) \leqslant 2^9\lambda^4$. Kluczową rolę pełni tu twierdzenie Dvoretzky'ego, mówiące, że ℓ_2 jest skończenie reprezentowalna (ang. *finitely representable*; tzn. jest α-reprezentowalna dla każdego $\alpha > 1$) w dowolnej nieskończenie wymiarowej przestrzeni Banacha.

Rozwój teorii przestrzeni Banacha przez ostatnie kilkadziesiąt lat pokazał, że wiele naturalnych hipotez, których potwierdzenie miałoby szansę dać fundament pod w miarę prostą teorię strukturalną, ma w istocie rozstrzygnięcie negatywne. Można tu wymienić choćby konstrukcję Enflo przestrzeni bez bazy Schaudera (1973), przestrzeń Tsirelsona niezawierającą kopii żadnej z przestrzeni c_0 bądź ℓ_p dla $1 \leqslant p < \infty$ (1974), dziedzicznie nierozkładalną przestrzeń Gowersa-Maureya, która nie ma żadnego bezwarunkowego ciągu bazowego (1993), czy w końcu także dziedzicznie nierozkładalną przestrzeń Argyrosa-Haydona, na której nie ma żadnych operatorów liniowych i ograniczonych innych niż te postaci $K + \lambda I$, gdzie K jest operatorem zwartym, a I identycznością. Wszystkie te konstrukcje są jednak technicznie skomplikowane i dalekie od „naturalnych" (dotyczy to zwłaszcza dwóch ostatnich, które są bardzo trudne). Twierdzenie Lindenstraussa-Tzafririego jest jednym z najważniejszych przykładów, w których problem stawiany jeszcze w czasach Banacha ma pozytywne rozwiązanie w tym sensie, że nie istnieje żaden horrendalny kontrprzykład, zaburzający poczucie symetrii, które chcielibyśmy wiązać z przestrzeniami Banacha.

Gdyby chcieć wybrać jedno z osiągnięć Jorama Lindenstraussa, które przysporzyło mu największej sławy poza środowiskiem matematyków, zajmujących się analizą funkcjonalną, i które znalazło największe, bezpośrednie zastosowania w różnych dziedzinach (nie tylko matematyki), nie byłoby raczej żadnych wątpliwości – byłby to lemat Johnsona-Lindenstraussa.

Lemat (Johnsona-Lindenstraussa (1984))**.** *Niech $\varepsilon \in (0,1)$ oraz $d \in \mathbb{N}$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieją stałe naturalne $k_n = O(\varepsilon^{-2} \log n)$ o następującej własności: dla dowolnych punktów $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^d$ istnieje takie odwzorowanie liniowe $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{k_n}$, że*

$$(1-\varepsilon)\|x_i - x_j\|^2 \leqslant \|f(x_i) - f(x_j)\|^2 \leqslant (1+\varepsilon)\|x_i - x_j\|^2$$

dla wszelkich $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Lemat ten pojawił się w artykule [16], gdzie został wyprowadzony w celu uzyskania pewnej wariacji twierdzenia Kirszbrauna, które mówi, że każdą funkcję lipschitzowską f określoną na dowolnym podzbiorze przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_1$, i przyjmującą wartości w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}_2$, można przedłużyć do funkcji lipschitzowskiej $\widetilde{f}\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ z zachowaniem stałej Lipschitza, tj. $\mathrm{Lip}(f) = \mathrm{Lip}(\widetilde{f})$. Twierdzenie Johnsona-Lindenstraussa opisuje podobny efekt dla funkcji o wartościach w przestrzeniach Hilberta, ale określonych na dowolnym skończonym podzbiorze przestrzeni metrycznej.

Mówiąc dokładniej, jeżeli Z jest przestrzenią metryczną, $M \subset Z$ jest zbiorem skończonym, $m \in \mathbb{N}$, a $f\colon M \to \ell_2^m$ jest dowolną funkcją, to istnieje taka funkcja lipschitzowska $\widetilde{f}\colon Z \to \ell_2^m$, że

$$\operatorname{Lip}(\widetilde{f}) \leqslant O\big(\sqrt{\log |M|}\big)\operatorname{Lip}(f).$$

Lemat Johnsona-Lindenstraussa znalazł szereg zastosowań, tak w czystej matematyce (np. do problemu zanurzania struktur grafowych w przestrzenie unormowane), jak i w praktycznych aspektach informatyki (np. do kompresji danych wielowymiarowych czy do algorytmów, pozwalających reprezentować wyniki analizy składowych głównych na rozmaitościach). Zastosowania tego typu raczej nie dziwią wobec faktu, że lemat Johnsona-Lindenstraussa jest konstruktywnym sposobem zredukowania liczby wymiarów potrzebnych do przechowania próbki danych wielowymiarowych. Odwzorowanie liniowe f, pojawiające się w tezie lematu, jest w istocie ortogonalną projekcją z przestrzeni $\mathbb{R}^d$ na pewną mniejszą jej podprzestrzeń.

Dowód lematu wykorzystuje metodę probabilistyczną; rozważa się projekcje ortogonalne na wybierane losowo podprzestrzenie wymiaru k_n i pokazuje, że wybór odpowiedniej projekcji f, spełniającej warunki tezy, występuje z prawdopodobieństwem dodatnim (zobacz też [7]). Alon [2] wykazał, że rząd oszacowania wymiaru k_n jest niemal optymalny; istnieją układy n punktów w $\mathbb{R}^d$, dla których każda kompresja do wymiaru $k = c(\varepsilon)\log n$ z dystorsją równą co najwyżej ε wymaga, aby $c(\varepsilon)$ było równe co najmniej $\Omega(\varepsilon^{-2}\log(1/\varepsilon)^{-1})$.

Jedno z najsłynniejszych, wciąż otwartych pytań analizy funkcjonalnej, leżące na pograniczu geometrii przestrzeni Banacha, teorii miar i martyngałów wektorowych, i być może czegoś, z czego nikt nie zdaje sobie jeszcze sprawy, brzmi: czy dla dowolnej przestrzeni Banacha własność Kreina-Milmana jest równoważna własności Radona-Nikodýma?

Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *własność Kreina-Milmana*, jeżeli każdy ograniczony, domknięty i wypukły zbiór $A \subset X$ jest domknięciem otoczki wypukłej swoich punktów ekstremalnych, który to zbiór oznaczymy, jak zwykle, symbolem $\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ext}(A)$. Oznacza to, że teza klasycznego twierdzenia Kreina-Milmana ma pozostać w mocy po zastąpieniu założenia zwartości danego zbioru założeniem ograniczoności i domkniętości. W roli zbioru A można więc zawsze wziąć kulę jednostkową, co od razu nas przekonuje, że np. przestrzenie c_0 i $L_1[0,1]$ nie mają własności Kreina-Milmana, jako że ich kule jednostkowe nie mają żadnych punktów ekstremalnych. Jest rzeczą dość zaskakującą, że własność Kreina-Milmana jest równoważna następującemu, formalnie słabszemu, warunkowi: każdy niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły zbiór $A \subset X$ ma choć jeden punkt ekstremalny. Fakt ten udowodnił Lindenstrauss [23], choć – do czego za chwilę przejdziemy – nie to (a przynajmniej nie tylko to) jest powodem, dla którego poruszamy tutaj ten temat. Dowód jest tak prosty, że warto go w tym miejscu przytoczyć.

Ustalmy taki zbiór $A \subset X$, jak wyżej. Chcemy wykazać, że A jest równy zbiorowi $B := \overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ext}(A)$, zakładając, że każdy niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły podzbiór przestrzeni X ma choć jeden punkt ektremalny. Oczywiście $B \subseteq A$. Jeżeli $B \subsetneq A$, to twierdzenie Hahna-Banacha o oddzielaniu gwarantuje, że istnieje taki funkcjonał $x^* \in X^*$, że $\sup x^*(B) < \sup x^*(A)$, podczas gdy twierdzenie Bishopa-Phelpsa (mówiące, że dla dowolnego zbioru $A \subset X$ o takich własnościach, jak u nas, zbiór tych funkcjonałów z X^*, które przyjmują w pewnym punkcie maksimum na zbiorze A, jest gęsty w X^*) pozwala założyć, że kres górny po prawej stronie tej nierówności jest równy $x^*(x_0)$ dla pewnego $x_0 \in A$. Wówczas zbiór $C = \{x \in A \colon x^*(x) = x^*(x_0)\}$ jest niepusty, ograniczony, domknięty i wypukły, więc na mocy założenia istnieje punkt $y \in \mathrm{ext}(C)$. Wtedy jednak $y \in \mathrm{ext}(A)$, gdyby bowiem $y = \alpha t + (1-\alpha)u$ dla pewnych $\alpha \in (0,1)$ oraz $t, u \in A$, to z definicji zbioru C mielibyśmy $t, u \in C$, skąd $t = u = y$. Z drugiej strony mamy oczywiście $y \notin B$, co jest niemożliwe z uwagi na inkluzję $\mathrm{ext}(A) \subseteq B$.

Mówimy, że przestrzeń Banacha X ma *własność Radona-Nikodýma*, jeżeli dla każdej przestrzeni mierzalnej (Ω, Σ, μ), z nieujemną miarą skończoną μ, i każdej σ-addytywnej miary wektorowej $m \colon \Sigma \to X$ o ograniczonej wariacji, absolutnie ciągłej względem μ (tzn. $\mu(E) \to 0$ implikuje $m(E) \to 0$) istnieje taka μ-całkowalna w sensie Bochnera funkcja $g \colon \Omega \to X$, że

$$m(E) = \int_E g\,\mathrm{d}\mu \quad \text{dla każdego } E \in \Sigma. \tag{1}$$

Oznacza to, że teza klasycznego twierdzenia Radona-Nikodýma, w wersji skalarnej, ma pozostać w mocy dla miar o wartościach w przestrzeni X, przynajmniej na tyle, na ile jest to możliwe (absurdalnym byłoby np. żądanie, aby miary o nieograniczonej wariacji reprezentowały się według powyższego wzoru). Podanie natychmiastowych przykładów negatywnych nie jest tu niestety tak proste, jak w przypadku własności Kreina-Milmana. Odnotujmy jednak, że jeżeli $\Omega = [0,1]$, Σ jest σ-ciałem podzbiorów borelowskich $[0,1]$, a μ jest miarą Lebesgue'a na $[0,1]$, to ani miara $m_1 : \Sigma \to c_0$ określona wzorem

$$m_1(E) = \Big(\int_E \sin\big(2^n \pi t\big)\,\mathrm{d}\mu(t)\Big)_{n=1}^{\infty}$$

(jej wartości leżą w c_0 na mocy lematu Riemanna-Lebesgue'a), ani miara $m_2 \colon \Sigma \to L_1[0,1]$ dana jako $m_2(E) = \mathbb{1}_E$, nie dadzą się zapisać w postaci (1), mimo że obie mają ograniczone wariacje i są μ-absolutnie ciągłe. Wynika stąd, że przestrzenie c_0 i $L_1[0,1]$ nie mają własności Radona-Nikodýma.

Pytanie o równoważność własności Kreina-Milmana oraz własności Radona-Nikodýma zostało postawione *explicite* przez Diestela w 1973 r. Choć na pierwszy rzut oka te dwie własności nie mają wiele wspólnego (pierwsza zdaje się mieć charakter geometryczny, druga – pozornie nie), dzisiejszy stan wiedzy pokazuje, jak silnie są ze sobą związane i że owa równoważność zachodzi praktycznie dla wszystkich „naturalnych” przestrzeni Banacha. Pierwszą motywacją do sformułowania hipotezy Diestela był zaskakujący rezultat Lindenstraussa [23]:

Twierdzenie 2 (Lindenstrauss, 1966)**.** *Własność Radona-Nikodýma implikuje własność Kreina-Milmana.*

Chcąc być precyzyjnym, należy powiedzieć, że Lindenstrauss wykazał własność Kreina-Milmana jedynie dla przestrzeni ℓ_1, jednak jego metoda była na tyle uniwersalna, że w świetle dalszych wyników, otrzymanych przez Namiokę, Maynarda, Davisa i Phelpsa w latach 1967-74, było jasne, że dowód Lindenstraussa pokazuje, że brak punktów ekstremalnych implikuje brak własności Radona-Nikodýma. Prace czterech wymienionych tu autorów pokazały związek między własnością Radona-Nikodýma, a geometrią przestrzeni. Wynika z nich w szczególności, że każdy ograniczony podzbiór D przestrzeni X o własności Radona-Nikodýma spełnia następujący warunek:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0} \bigvee_{x\in D} \qquad x \notin \overline{\mathrm{co}}\big(D \setminus B(x,\varepsilon)\big) \tag{2}$$

(ang. *dentable set*). Ideą dowodu Lindenstraussa było zaś pokazanie, że zaprzeczenie własności Kreina-Milmana prowadzi do konstrukcji ograniczonego zbioru D, dla którego (2) nie zachodzi.

Dziś wiadomo, że implikacja odwrotna do tej z twierdzenia 2 zachodzi dla wszystkich dualnych przestrzeni Banacha (Huff, Morris, 1975), wszystkich krat Banacha (Bourgain, Talagrand, 1981) oraz wszystkich przestrzeni Banacha X, zawierających izomorficzną kopię swojego kwadratu $X \oplus X$ (Schachermayer, 1985). Wiele szczegółowych, a także przeglądowych informacji na temat problemu Diestela można znaleźć w [8, rozdział 7]. Kończąc ten wątek, zaznaczmy, że choć problem ma pozytywne rozstrzygnięcie dla bardzo szerokiej klasy przestrzeni, całkowite rozwiązanie wydaje się obecnie poza zasięgiem. Przytoczmy tu jedno zdanie z książki [1]: *It is probably fair to say that the subject has received relatively little attention since the 1980s and some really new ideas seem to be necessary to make further progress.*

Nawet najbardziej wpływowe dzieła muszą czasem przeczekać długie lata, by dotrzeć do ogólnej świadomości, a często potrzebują wręcz kogoś, kto na nowo zauważy ich prawdziwy potencjał i odkryje go przed światem. W roku 1953 Alexander Grothendieck opublikował w języku francuskim, w słabo dostępnym czasopiśmie brazylijskim, genialny artykuł [12], dotyczący iloczynów tensorowych przestrzeni Banacha. Dziś znaczenie tej pracy i namaszczenie, z jakim jest słusznie traktowana, jest tak wielkie, że powszechnie nazywana jest „résume Grothendiecka”, co jest lakoniczną wersją jej oryginalnego tytułu. Z matematycznego punktu widzenia brak zainteresowania tą pracą, jaki miał miejsce aż do roku 1968, można tłumaczyć skupieniem się Grothendiecka wyłącznie na przestrzeniach Banacha (*vide:* „la théorie métrique” w tytule) i pominięciem modnego w tamtym czasie ujęcia ogólnego, tj. lokalnie wypukłych przestrzeni liniowo-topologicznych. Najważniejszym wynikiem pracy był pewien zaskakujący, silny związek między trzema fundamentalnymi przestrzeniami Banacha: L_1, L_2 i L_∞, nazwany przez samego Grothendiecka mianem „Théorème fondamental de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques”. Dziś wynik ten jest powszechnie znany jako

Nierówność Grothendiecka. *Istnieje absolutna stała $K_\mathcal{G} < \infty$ o następującej własności: Jeżeli $n \in \mathbb{N}$, a $(a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ jest rzeczywistą macierzą wymiaru $n \times n$, która dla wszelkich $(\alpha_i)_{i=1}^n, (\beta_j)_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ spełnia nierówność*

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\alpha_i\beta_j\right| \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} |\alpha_i| \cdot \max_{1\leqslant j\leqslant n} |\beta_j|,$$

to dla dowolnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ i dowolnych ciągów $(x_i)_{i=1}^n, (y_j)_{j=1}^n \subset \mathcal{H}$ mamy

$$\left|\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| \leqslant K_\mathcal{G} \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\| \cdot \max_{1\leqslant j\leqslant n} \|y_j\|.$$

Nierówność ta jest prawdziwa także dla macierzy i skalarów zespolonych, przy czym zwiększeniu może ulec stała $K_\mathcal{G}$. Niech więc $K_\mathcal{G}^\mathbb{R}$ i $K_\mathcal{G}^\mathbb{C}$ oznaczają optymalne stałe w przypadku, odpowiednio, rzeczywistym i zespolonym. Nietrudno zauważyć, że $K_\mathcal{G}^\mathbb{C} \leqslant 2K_\mathcal{G}^\mathbb{R}$, ale dowód tego, że $K_\mathcal{G}^\mathbb{R}$ jest skończona, wymaga niezwykłej pomysłowości. Grothendieck pokazał, że

$$\frac{\pi}{2} \leqslant K_\mathcal{G}^\mathbb{R} \leqslant \sinh\frac{\pi}{2} = \frac{e^{\pi/2} - e^{-\pi/2}}{2}.$$

Artykuł Grothendiecka był bardzo trudny w odbiorze i przez piętnaście lat dla środowiska matematycznego w zasadzie nie istniał. Sytuacja diametralnie zmieniła się, kiedy w roku 1968 Joram Lindenstrauss i Aleksander Pełczyński opublikowali pracę [25], której zasadniczym celem było, mówiąc po prostu, przedstawienie światu niezauważonych dotąd idei zawartych w „résume”. Istotnie uprościli oni oryginalną prezentację, pozbywając się całkowicie aparatury iloczynów tensorowych. Ich praca nie składała się jednak tylko z uproszczenia czy przeformułowania rozumowań Grothendiecka.

Lindenstrauss i Pełczyński zauważają, że większość wniosków, wypływających z twierdzeń Grothendiecka, ma w istocie charakter lokalny. Z tego powodu definiują klasy $\mathscr{L}_p$-przestrzeni (dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$), wyodrębniając te przestrzenie Banacha, których skończenie wymiarowe podprzestrzenie są podobne do tych zawartych w przestrzeniach typu $L_p(\mu)$. Formalna definicja jest następująca: przestrzeń Banacha X nazywamy *$\mathscr{L}_{p,\lambda}$-przestrzenią* (dla pewnych $\lambda \geqslant 1$ oraz $1 \leqslant p \leqslant \infty$), jeżeli dla każdej skończenie wymiarowej podprzestrzeni $E \subset X$ istnieje taka skończenie wymiarowa podprzestrzeń $F \subset X$, zawierająca E, że $d(F, \ell_p^n) \leqslant \lambda$, gdzie $n = \dim F$ (przypomnijmy, że d oznacza odległość Banacha-Mazura). Powiemy zaś, że X jest *$\mathscr{L}_p$-przestrzenią*, jeżeli jest $\mathscr{L}_{p,\lambda}$-przestrzenią dla pewnej liczby $\lambda \geqslant 1$. Przestrzenie Banacha, należące jednocześnie do wszystkich klas $\mathscr{L}_{\infty,1+\varepsilon}$ przy każdym $\varepsilon > 0$, były rozważane *implicite* przez Lindenstraussa już w jego rozprawie doktorskiej [21]. Posługiwał się on tam wprawdzie klasą *L_1-preduali*, tj. takich przestrzeni Banacha, których dual jest izometryczny do $L_1(\mu)$ dla pewnej miary μ, ale – jak się okazało ze wspólnej pracy z Pełczyńskim – jest ona dokładnie równa przekrojowi rodzin $\mathscr{L}_{\infty,1+\varepsilon}$, przy $\varepsilon > 0$. Dzisiaj takie przestrzenie nazywane są *przestrzeniami Lindenstraussa*. Jeden z najważniejszych rezultatów jego pracy doktorskiej brzmi następująco:

Twierdzenie 3 (Lindenstrauss, 1964)**.** *Dla każdej przestrzeni Banacha X następujące warunki są równoważne:*

(i) *X jest L_1-predualem;*

(ii) *dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$ i każdego liniowego operatora zwartego $T\colon Y \to X$ istnieje taki liniowy i zwarty operator $\widetilde{T}\colon Z \to X$, że $\widetilde{T}|_Y = T$ oraz $\|T\| = \|\widetilde{T}\|$;*

(iii) *dowolna rodzina parami przecinających się kul w przestrzeni X, których środki tworzą podzbiór relatywnie zwarty, ma niepusty przekrój;*

(iv) *dowolna czteroelementowa rodzina parami przecinających się kul w przestrzeni X ma niepusty przekrój.*

Należy odnotować, że twierdzenie to było uzupełnieniem wcześniejszych wyników Grothendiecka [13] (tym razem opublikowanych w Kanadzie, więc nieco lepiej), który prawdopodobnie jako pierwszy uzyskał pozytywne rezultaty, dotyczące przedłużania operatorów zwartych. Chwila refleksji pokazuje, że warunek (iv) nie jest spełniony dla przestrzeni euklidesowej ℓ_2^2, zachodzi natomiast dla ℓ_1^2 oraz ℓ_∞^2. Oczywiście $(\ell_\infty^2)^* = \ell_1^2$ (izometrycznie), zaś $(\ell_1^2)^* = \ell_\infty^2$ (izometrycznie), co także jest izometryczne z ℓ_1^2 (obrót wokół środka układu o kąt $\pi/4$ złożony z jednokładnością o skali $1/\sqrt{2}$ jest izometrią z ℓ_∞^2 na ℓ_1^2).

Jak już wspomnieliśmy, Lindenstrauss i Pełczyński wykazali, że klasa przestrzeni Lindenstraussa jest równa rodzinie L_1-preduali. Wymieńmy teraz kilka dalszych rezultatów ich pracy [25], które zainicjowały rozwój teorii $\mathscr{L}_p$-przestrzeni:

- Przede wszystkim każda przestrzeń $L_p(\mu)$, dla dowolnej miary μ, jest $\mathscr{L}_{p,1+\varepsilon}$-przestrzenią dla każdego $\varepsilon > 0$. Podobnie każda przestrzeń $C(K)$, dla dowolnej zwartej przestrzeni Hausdorffa K, jest przestrzenią Lindenstraussa.
- Każda $\mathscr{L}_p$-przestrzeń jest izomorficzna z pewną podprzestrzenią przestrzeni $L_p(\mu)$, przy czym dla $1 < p < \infty$ podprzestrzeń ta może być nawet komplementarna. W szczególności każda $\mathscr{L}_2$-przestrzeń jest izomorficzna z przestrzenią Hilberta, co oznacza, mówiąc nieprecyzyjnie, że przestrzenie Hilberta charakteryzują się lokalnie.
- Jeżeli X jest $\mathscr{L}_1$-przestrzenią, to X^* jest injektywna, tzn. każdy ograniczony operator liniowy, działający na podprzestrzeni Y dowolnej przestrzeni Banacha Z, i przyjmujący wartości w X, ma przedłużenie do ograniczonego operatora liniowego $Z \to X$.
- Dla $1 \leqslant p < \infty$ każda nieskończenie wymiarowa $\mathscr{L}_p$-przestrzeń ma komplementarną podprzestrzeń izomorficzną z ℓ_p.

Zatrzymajmy się na chwilę przy problemie klasyfikacji przestrzeni $\mathscr{L}_p$. O ile dla $p = 2$ są to jedynie izomorficzne kopie przestrzeni Hilberta, o tyle dla każdego $p \in [1,\infty) \setminus \{2\}$ Lindenstrauss z Pełczyńskim wykazali, że klasa $\mathscr{L}_p$ jest istotnie bogatsza od klasy wszystkich izomorficznych kopii przestrzeni $L_p(\mu)$. Warto przyjrzeć się następującemu przykładowi opartemu na eleganckim pomyśle, pochodzącym z wcześniejszej pracy Lindenstraussa [22]:

Przykład 1 ($\mathscr{L}_1$-przestrzeni, która nie jest komplementarna w żadnej przestrzeni $L_1(\mu)$). Potraktujmy liczby naturalne jako etykiety drzewa binarnego, tzn. j-temu w kolejności węzłowi drzewa, leżącemu na k-tym poziomie (dla $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leqslant j < 2^k$), odpowiada numer $n = 2^k + j$. Każdy poziom tego drzewa naturalnie wyznacza podział odcinka $[0,1]$ na przedziały postaci $I_n = [j/2^k, (j+1)/2^k]$; przedział I_n odpowiada węzłowi o numerze n. Niech $(e_n)_{n=1}^\infty$ będzie kanoniczną bazą Schaudera przestrzeni ℓ_1. Określmy operator liniowy $T\colon \ell_1 \to L_1[0,1]$ wzorem $T(e_n) = 2^k \mathbb{1}_{I_n}$ dla $n \in \mathbb{N}$, przy czym $n = 2^k + j$ dla takich j i k, jak wyżej. Dość łatwo zauważyć, że T jest operatorem ograniczonym i surjektywnym. Ponadto jego jądrem jest podprzestrzeń $X \subset \ell_1$, będąca domknięciem przestrzeni rozpiętej na wektorach

$x_n = e_n - \frac{1}{2}(e_{2n} + e_{2n+1})$, $n \in \mathbb{N}$. Przyjmując $Y_n = \operatorname{span}\{x_j\}_{j=1}^n$, można sprawdzić, że $d(Y_n, \ell_1^n) \leqslant 2$ dla $n \in \mathbb{N}$, skąd wynika, że X jest $\mathscr{L}_{1,2+\varepsilon}$-przestrzenią dla każdego $\varepsilon > 0$. Nieco trudniej wykazać, że X nie jest komplementarna w swoim biduali, co z kolei implikuje, że nie jest komplementarna w żadnej dualnej przestrzeni Banacha. Stąd zaś wynika, że nie jest ona izomorficzna z żadną komplementarną podprzestrzenią żadnej przestrzeni $L_1(\mu)$, jako że każda tego typu przestrzeń jest komplementarna w swoim bidualu*.

Uzasadnienie tego, że w powyższym przykładzie X nie jest komplementarna w X^{**}, nie jest bynajmniej natychmiastowe i wymaga sprytnego rozumowania opartego na zwartości. Lindenstrauss w swojej pracy [22] dowodzi przy tej okazji pewnej niezwykle użytecznej „własności podniesienia" dla przestrzeni ℓ_1. Przytoczymy ją tutaj w ulepszonej wersji podanej przez Kaltona i Pełczyńskiego [20], która pasuje zresztą świetnie do naszego kontekstu, gdyż akcentuje rolę, jaką pełnią tutaj przestrzenie z klasy $\mathscr{L}_1$.

Lindenstrauss lifting principle (1964). *Załóżmy, że $Q\colon X \to Y$ jest ograniczonym operatorem liniowym, odwzorowującym przestrzeń Banacha X na przestrzeń Banacha Y, przy czym* $\ker(Q)$ *jest przestrzenią komplementarną w swoim bidualu. Wówczas dla każdej $\mathscr{L}_1$-przestrzeni Z dowolny ograniczony operator liniowy $T\colon Z \to Y$ dopuszcza podniesienie, tj. taki ograniczony operator liniowy $S\colon Z \to X$, że $T = QS$.*

Dla $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$ Lindenstrauss i Pełczyński eksponują cztery następujące $\mathscr{L}_p$-przestrzenie: ℓ_p, $L_p[0,1]$, $\ell_p \oplus \ell_2$ i $(\ell_2 \oplus \ell_2 \oplus \ldots)_p$, dowodząc, że są one parami nieizomorficzne, przy czym dwie ostatnie to również przykłady $\mathscr{L}_p$-przestrzeni nieizomorficznych z żadną $L_p(\mu)$-przestrzenią. W swojej pracy stawiają m.in. następujące pytania:

(1) Czy każda ośrodkowa $\mathscr{L}_p$-przestrzeń, dla $p \in (1,\infty) \setminus \{2\}$, jest izomorficzna z jedną z czterech wyżej wymienionych $\mathscr{L}_p$-przestrzeni?

(2) Czy każda $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeń jest izomorficzna z przestrzenią $C(K)$ dla pewnej zwartej przestrzeni Hausdorffa K?

(3) Niech X będzie $\mathscr{L}_p$-przestrzenią ($1 \leqslant p \leqslant \infty$). Czy X^* musi być $\mathscr{L}_q$-przestrzenią, gdzie $p^{-1} + q^{-1} = 1$?

W ciągu kilkunastu lat od opublikowania pracy Lindenstraussa i Pełczyńskiego zrozumienie struktury $\mathscr{L}_p$-przestrzeni ogromnie się rozwinęło. Lata

*Jeżeli μ jest miarą semi-skończoną (tzn. dla każdego mierzalnego zbioru A, spełniającego $\mu(A) = \infty$ istnieje taki mierzalny zbiór $B \subset A$, że $0 < \mu(B) < \infty$), to projekcję $L_1(\mu)^{**} \to L_1(\mu)$ można zadać jawnie; zobacz np. [11, §367U]. Z kolei twierdzenie Luthera [32] daje rozkład dowolnej miary nieujemnej μ na sumę $\mu_1 + \mu_2$, gdzie μ_1 jest semi-skończona, a μ_2 zdegenerowana (tzn. przyjmuje tylko wartości 0 i ∞), z czego wynika, że $L_1(\mu)$ jest izometrycznie izomorficzna z $L_1(\mu_1)$.

1969-1981 dały bardzo daleko idące odpowiedzi na takie pytania, jak powyżej; w szczególności odpowiedzi na pytania (1) i (2) okazały się „mocno" negatywne. Przytoczmy tu kilka najbardziej efektownych rezultatów:

- W 1972 r. Benyamini i Lindenstrauss [4] udowodnili, że istnieje przestrzeń Banacha X, będąca $\mathscr{L}_{\infty,1+\varepsilon}$-przestrzenią dla każdego $\varepsilon > 0$ (czyli przestrzenią Lindenstraussa), dla której $X^* \simeq \ell_1$ izometrycznie, i która nie jest izomorficzna z żadną komplementarną podprzestrzenią $C[0,1]$. Klasa przestrzeni Lindenstraussa jest więc bogatsza od klasy $C(K)$-przestrzeni*.
- W 1980 r. Johnson i Lindenstrauss [15] pokazali, że istnieje $2^{\aleph_0}$ wzajemnie nieizomorficznych $\mathscr{L}_1$-przestrzeni, z których każda ma własność Radona-Nikodýma.
- W 1981 r. Bourgain, Rosenthal i Schechtman [6] udowodnili, że dla każdego $1 \leqslant p \leqslant \infty$ istnieje nieprzeliczalnie wiele wzajemnie nieizomorficznych $\mathscr{L}_p$-przestrzeni. Oczywiście dla $p = \infty$ wynika to bezpośrednio ze znacznie starszego twierdzenia Bessagi-Pełczyńskiego (zobacz [33]), które mówi, że rodzina przestrzeni $C[0, \omega^{\omega^\alpha}]$, gdzie $\alpha \geqslant 0$ przebiega zbiór przeliczalnych liczb porządkowych, wyczerpuje (z dokładnością do izomorfizmu) całą klasę przestrzeni $C(K)$ dla zwartych, metrycznych i przeliczalnych K, a także – że żadne dwie przestrzenie z tej rodziny nie są izomorficzne.
- Przykład, który podali Benyamini i Lindenstrauss pokazał, że przestrzenie $C(K)$ nie charakteryzują się lokalnie poprzez podobieństwo swoich skończenie wymiarowych podprzestrzeni do przestrzeni postaci ℓ_∞^n. W 1981 r. Bourgain i Delbaen [5] pokazali jak naprawdę daleko jest ogólnym $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeniom do przestrzeni typu $C(K)$, konstruując $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeń nasyconą przestrzeniami refleksywnymi (tzn. której każda nieskończenie wymiarowa podprzestrzeń zawiera nieskończenie wymiarową podprzestrzeń refleksywną), a zatem jest to $\mathscr{L}_\infty$-przestrzeń, która nie zawiera nawet kopii c_0**.

Odpowiedź na pytanie (3) już w 1969 r. uzyskali Lindenstrauss i Rosenthal [33], pokazując, że dla dowolnego $1 \leqslant p \leqslant \infty$ przestrzeń X jest $\mathscr{L}_p$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy X^* jest $\mathscr{L}_q$-przestrzenią, przy czym $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Odkryli przy tej okazji głęboki i bardzo często dziś przytaczany fakt, mówiący, że dla dowolnej przestrzeni Banacha X jej drugi dual

*Przestrzeń X jest ośrodkowa jako predual ℓ_1. Gdyby więc była postaci $C(K)$, wtedy K byłaby zwartą przestrzenią metryczną. Jednak każda taka przestrzeń jest izomorficzna z komplementarną podprzestrzenią $C[0,1]$; zobacz np. [33].

**Przestrzeń c_0 nie zawiera żadnej nieskończenie wymiarowej podprzestrzeni refleksywnej, gdyż jest c_0-nasycona, co udowodnił Pełczyński w roku 1960 (zob. np. [1, §2.2]).

X^{**} jest skończenie reprezentowalny w X, nawet jeśli z globalnego punktu widzenia X^{**} jest dużo większa od X. Dziś jest on powszechnie znany pod nazwą zasady lokalnej refleksywności (ang. *local reflexivity principle*).

Zasada lokalnej refleksywności (Lindenstraussa-Rosenthala, 1969). *Niech X będzie przestrzenią Banacha (utożsamioną w sposób kanoniczny z podprzestrzenią X^{**}), a $F \subset X^{**}$ oraz $G \subset X^*$ przestrzeniami skończenie wymiarowymi. Wówczas dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje różnowartościowy operator liniowy $T\colon F \to X$, spełniający warunki:*

(a) $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| < 1 + \varepsilon$,

(b) $T(x) = x$ *dla wszelkich* $x \in F \cap X$,

(c) $x^*(Tx^{**}) = x^{**}x^*$ *dla wszelkich* $x^* \in G$ *oraz* $x^{**} \in F$.

Z pracy Lindenstraussa i Rosenthala warto również wymienić następujące rezultaty:

- Dla $1 < p < \infty$ każda komplementarna podprzestrzeń $\mathscr{L}_p$-przestrzeni jest $\mathscr{L}_p$-przestrzenią lub izomorficzną kopią przestrzeni Hilberta.

- Przestrzeń Banacha X jest $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy X^{**} jest injektywna.

- Przestrzeń Banacha X jest $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenią wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych przestrzeni Banacha $Y \subset Z$ i każdego liniowego operatora zwartego $T\colon Y \to X$ istnieje taki liniowy i zwarty operator $\widetilde{T}\colon Z \to X$, że $\widetilde{T}|_Y = T$. Dowód odwoływał się do wyników z pracy doktorskiej Lindenstraussa (porównaj z twierdzeniem 3).

Wróćmy teraz do artykułu Lindenstraussa i Pełczyńskiego [25], który jest prezentacją siły i znaczenia nierówności Grothendiecka dla teorii przestrzeni Banacha. Jak piszą we wstępie autorzy, (...) *by using these results some problems which were posed by various authors in the last decade can be easily solved.* Omówmy zatem pokrótce, jakiego typu były to problemy, stawiane po (!) roku 1953, a których rozwiązanie już tkwiło ukryte na stronach brazylijskiego czasopisma.

Aby zrozumieć, w jaki sposób nierówność Grothendiecka wiąże przestrzenie typu L_1, L_2 i L_∞, należy odwołać się do pojęcia operatora p-bezwzględnie sumującego (ang. *p-absolutely summing*), wprowadzonego przez Pietscha w roku 1967. Dla dowolnego ograniczonego operatora liniowego

$T\colon X\to Y$, działającego między przestrzeniami Banacha X i Y, oraz dowolnej liczby $p\in[1,\infty)$, niech

$$a_p(T)=\inf\Big\{C>0\colon \Big(\sum_{j=1}^n\|Tx_j\|^p\Big)^{1/p}\leqslant C\cdot\sup_{\|x^*\|\leqslant 1}\Big(\sum_{j=1}^n|x^*x_j|^p\Big)^{1/p}\ \text{dla wszelkich } n\in\mathbb{N}\text{ oraz } x_1,\dots,x_n\in X\Big\}$$

Operator T nazywamy *p-bezwzględnie sumującym*, jeżeli $a_p(T)<\infty$. Następujący rezultat tłumaczy nierówność Grothendiecka na język takich właśnie operatorów.

Twierdzenie 4 (Lindenstrauss, Pełczyński 1968)**.** *Niech X, Y będą przestrzeniami Banacha, a $T\colon X\to Y$ ograniczonym operatorem liniowym. Wówczas:*

(a) *jeżeli X jest $\mathscr{L}_1$-przestrzenią, a Y jest przestrzenią Hilberta, to T jest 1-bezwzględnie sumujący oraz $a_1(T)\leqslant\lambda K_{\mathcal{G}}\|T\|$, gdzie $\lambda\geqslant 1$ jest taką liczbą, że $X\in\mathscr{L}_{1,\lambda}$;*

(b) *jeżeli X jest $\mathscr{L}_\infty$-przestrzenią, a Y jest $\mathscr{L}_p$-przestrzenią dla pewnego $p\in[1,2]$, to T jest 2-bezwzględnie sumujący oraz $a_2(T)\leqslant\lambda\rho K_{\mathcal{G}}\|T\|$, gdzie $\lambda,\rho\geqslant 1$ są takimi liczbami, że $X\in\mathscr{L}_{\infty,\lambda}$ oraz $Y\in\mathscr{L}_{p,\rho}$.*

Teza (a) powyższego twierdzenia niejako charakteryzuje przestrzenie Hilberta. Jeżeli bowiem przestrzeń X ma bezwarunkową bazę Schaudera oraz każdy ograniczony i liniowy operator $X\to Y$ jest 1-bezwzględnie sumujący, to $X\simeq\ell_1(\Gamma)$ dla pewnego zbioru Γ oraz $Y\simeq\mathcal{H}$ dla pewnej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Operatory bezwzględnie sumujące są niezwykle skutecznym narzędziem teorii przestrzeni Banacha i pozwalają często uzyskiwać wyniki pozornie zupełnie niezwiązane z teorią operatorów. Dwa przykłady z pracy Lindenstraussa i Pełczyńskiego:

- Każda bezwarunkowa baza przestrzeni c_0 i ℓ_1 jest równoważna bazie kanonicznej (w tym sensie, że istnieje izomorfizm, przekształcający tę bazę na bazę kanoniczną). Analogiczny wynik jest prawdziwy dla ℓ_2, ale dowód w tym przypadku jest znacznie prostszy – wymaga jedynie tożsamości równoległoboku. Już w 1969 r. Lindenstrauss wspólnie z Zippinem [31] udowodnili, że przestrzenie c_0, ℓ_1 i ℓ_2 są jedynymi (z dokładnością do izomorfizmu) przestrzeniami Banacha, które mają własność jednoznaczności bazy bezwarunkowej.
- Przestrzeń Hardy'ego H_1, definiowana tutaj jako L_1-domknięcie przestrzeni wielomianów zespolonych na okręgu jednostkowym z miarą Lebesgue'a μ, nie jest komplementarna w $L_1(\mu)$. Wynik ten był uzyskany wcześniej przez Newmana, jednak Lindenstrauss i Pełczyński

podali elegancki dowód, wskazując po prostu ograniczony operator liniowy $T\colon H_1 \to \ell_2$, który nie jest 1-bezwzględnie sumujący:

$$T\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) = \left(\frac{a_n}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty}.$$

Omówiliśmy tu ledwie niewielką częśc dorobku naukowego Jorama Lindenstraussa. Do innych jego najważniejszych osiągnięć zaliczyć można: wykazanie, że każda nieskończenie wymiarowa, komplementarna podprzestrzeń ℓ_∞ jest izomorficzna z ℓ_∞ ([24]), głębokie badania nad przestrzeniami Eberleina i wprowadzenie pojęcia WCG (ang. *weakly compactly generated*) przestrzeni Banacha ([3], wspólnie z Amirem), wykazanie, że $C[0,1]$ jest prymarna ([26], wspólnie z Pełczyńskim), istotny wkład w teorię „problemu trzech przestrzeni" ([9], wspólnie z Enflo i Pisierem), w tym konstrukcja *przestrzeni Johnsona-Lindenstraussa* ([14]). Wymieniać można długo.

We wspomnieniu Jorama Lindenstraussa, opublikowanym w internecie w dzień jego śmierci przez Nassifa Ghoussouba, przytoczona jest historia sprzed ponad trzydziestu lat, kiedy w prywatnej rozmowie Lindenstrauss miał powiedzieć o swoim synu, że jest „dobry" (użyte zostało właśnie słowo „good"). Ghoussoub oczywiście zrozumiał, że chodziło tu o zdolności matematyczne, a znając sposób formułowania sądów przez Lindenstraussa, można było wnioskować, że jego syn ma szansę pewnego dnia otrzymać Medal Fieldsa. Tak też się stało. 19 sierpnia 2010 roku Elon Lindenstrauss odebrał Medal Fieldsa za badania nad teorią ergodyczną i jej zastosowaniami w teorii liczb.

[Literatura]

[1] F. Albiac, N.J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Grad. Texts in Math. 233, Springer 2006.

[2] N. Alon, *Problems and results in extremal combinatorics I*, Discrete Math. 273 (2003), 31–53.

[3] D. Amir, J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Annals of Math. 88 (1968), 35–46.

[4] Y. Benyamini, J. Lindenstrauss, *A predual of ℓ_1 which is not isomorphic to a $C(K)$-space*, Israel J. Math. 13 (1972), 246–259.

[5] J. Bourgain, F. Delbaen, *A class of special $\mathscr{L}_\infty$ spaces*, Acta Math. 145 (1981), 155–176.

[6] J. Bourgain, H.P. Rosenthal, G. Schechtman, *An ordinal L^p-index for Banach spaces, with applications to complemented subspaces of L^p*, Annals of Math. 114 (1981), 193–228.

[7] S. Dasgupta, A. Gupta, *An elementary proof of a theorem of Johnson and Lindenstrauss*, Random Structures & Algorithms 22 (2003), 60–65.

[8] J. Diestel, J.J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, Mathematical Surveys and Monographs 15, American Mathematical Society, Providence, R.I. 1977.

[9] P. Enflo, J. Lindenstrauss, G. Pisier, *On the "three-space problem"*, Math. Scand. 36 (1975), 199–210.

[10] T. Figiel, *Review of [17]*, Math. Rev. 53 (1977), #3649.

[11] D.H. Fremlin, *Measure Theory*, vol. 3: *Measure Algebras*, Torres Fremlin 2002.

[12] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Boll. Soc. Mat. São-Paulo 8 (1953), 1-79.

[13] A. Grothendieck, *Une caractérisation vectorielle métrique des espace L^1*, Canadian J. Math. 7 (1955), 552–561.

[14] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Some remarks on weakly compactly generated Banach spaces*, Israel J. Math. 17 (1974), 219–230.

[15] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Examples of $\mathscr{L}_1$ spaces*, Ark. Mat. 18 (1980), 101–106.

[16] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz maps into a Hilbert space*, Contemp. Math. 26 (1984), 189–206.

[17] M.I. Kadets, B.S. Mitjagin, *Complemented subspaces in Banach spaces*, Uspekhi Mat. Nauk 28 (1973), 77–94 (po rosyjsku); tłumaczenie angielskie: Russian Math. Surveys 28 (1973), 77–95.

[18] S. Kakutani, *Some characterizations of Euclidean space*, Japan J. Math. 16 (1939), 93–97.

[19] N.J. Kalton, *The complemented subspace problem revisited*, Studia Math. 188 (2008), 223–257.

[20] N.J. Kalton, A. Pełczyński, *Kernels of surjections from $\mathscr{L}_1$-spaces with an application to Sidon sets*, Math. Ann. 309 (1997), 135–158.

[21] J. Lindenstrauss, *Extensions of compact operators*, Memoirs Amer. Math. Soc. 48 (1964).

[22] J. Lindenstrauss, *On a certain subspace of ℓ_1*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Math., Astr. et Phys. 12 (1964), 539–542.

[23] J. Lindenstrauss, *On extreme points in ℓ_1*, Israel J. Math. 4 (1966), 59–61.

[24] J. Lindenstrauss, *On complemented subspaces of m*, Israel J. Math. 5 (1967), 153–156.

[25] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968), 275–326.

[26] J. Lindenstrauss, A. Pełczyński, *Contributions to the theory of the classical Banach spaces*, J. Funct. Anal. 8 (1971), 225–249.

[27] J. Lindenstrauss, H.P. Rosenthal, *The $\mathscr{L}_p$ spaces*, Israel J. Math. 7 (1969), 325–349.

[28] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *On the complemented subspaces problem*, Israel J. Math. 9 (1971), 263–269.

[29] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces*, Springer-Verlag, Berlin 1977.

[30] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II. Function Spaces*, Springer-Verlag, Berlin 1979.

[31] J. Lindenstrauss, M. Zippin, *Banach spaces with a unique unconditional basis*, J. Funct. Anal. 3 (1969), 115–125.

[32] N.Y. Luther, *A decomposition of measures*, Canadian J. Math. 20 (1968), 953–958.

[33] H.P. Rosenthal, *The Banach spaces $C(K)$*; w *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, vol. 2, 1547–1602, North-Holland, Amsterdam 2001.

Tomasz Kochanek

Autor artykułu jest adiunktem w Instytucie Matematyki Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach, a także Opiekunem Koła Naukowego Matematyków UŚ.

[Dwa słowa o izomorfizmie Lindenstraussa-Haagerupa]

Joramowi Lindenstraussowi i Uffe Haagerupowi przypisywane jest udowodnienie istnienia izomorfizmu w kategorii przestrzeni Banacha pomiędzy algebrami von Neumanna (jakże różnymi!) $\mathscr{B}(\ell_2)$ a $\mathscr{R}$, tj. algebrą operatorów ograniczonych na przestrzeni ℓ_2 a (jedynym) hiperskończonym faktorem typu II_1, o którym można myśleć jako o „nieskończonym" iloczynie tensorowym $M_2 \bar{\otimes} M_2 \bar{\otimes} \ldots$ (algebry $\mathscr{R}$ i $\mathscr{B}(\ell_2)$ nie są izomorficzne w kategorii C*-algebr, gdyż rozróżnia je istnienie skończonego śladu na $\mathscr{R}$ – w $\mathscr{B}(\ell_2)$ nie mamy oczywiście do dyspozycji takiego śladu).

Uffe Haagerup twierdzi, że nie pamięta już niestety wspomnianej konstrukcji, bo nie została ona nigdy spisana (ani tym bardziej opublikowana). Chciałbym zachęcić wszystkich Czytelnikow do prób poszukiwań dowodu istnienia rzeczonego izomorfizmu. Możliwą wskazkówką może okazać się istnienie stosunkowo nietrudnego do skonstruowania izomorfizmu (przestrzeni Banacha) $\mathscr{B}(\ell_2) \cong \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{B}(\ell_2^n)\right)_{\ell_\infty}$.

Tomek Kania (t.kania@lancaster.ac.uk)

[Odeszli w roku 2012]

William Thurston [1946–2012] był autorem fundamentalnych wyników dotyczących struktury topologicznej rozmaitości trójwymiarowych, za które w 1982 roku otrzymał Medal Fieldsa (wręczony podczas Międzynarodowego Kongresu Matematyków w Warszawie w 1983 roku). Uhonorowano go również m.in. Nagrodą Steele'a (2012).

W ostatnich miesiącach zmarł też, uważany przez wielu za najwybitniejszego matematyka niemieckiego drugiej połowy XX wieku, Friedrich Hirzebruch. Zajmował się on głównie zastosowaniami topologii w badaniach rozmaitości algebraicznych oraz teorii liczb. Fiedrich Hirzebruch był laureatem wielu prestiżowych nagród, w tym nagrody Fundacji Wolfa (1988), medalu im. Łobaczewskiego (1989), medalu im. Einsteina (1999) czy medalu im. Georga Cantora (2004). Był prezesem Europejskiego Towarzystwa Matematycznego.

Algebrami Banacha zajmował się z kolei William Bade [1924–2012] – pracujący przez lata w Uniwersytecie Kalifornijskim w Berkeley. Zajmował się m.in. teorią automatycznej ciągłości homomorfizmów i derywacji oraz algebrami Boole'a operatorów na przestrzeniach Banacha.

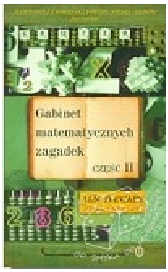
oprac. Joanna Zwierzyńska

[Opowiedzieć matematykę]

Gabinet matematycznych zagadek profesora Stewarta

„Kiedy miałem czternaście lat, zacząłem prowadzić brulion. Matematyczny. Zanim uznacie mnie za przypadek beznadziejny, dodam, że nie zapisywałem w nim tego, czego nauczyłem się na lekcjach. W moim brulionie notowałem wszystko, co mogłem znaleźć interesującego o matematyce, której nie uczono w szkole. A jak się przekonałem, było tego całkiem sporo, bo niebawem musiałem kupić następny zeszyt. (...) Mój brulion rozrósł się do sześciu zeszytów, które nadal mam, a następnie do katalogu fiszek (...). Gabinet matematycznych zagadek to kawałek mojego archiwum, wybór interesujących matematycznych gier, zagadek, historii i ciekawostek" – pisze we wstępie do *Gabinetu matematycznych zagadek* Ian Stewart, profesor matematyki Uniwersytetu w Warwick, powszechnie uważany (moim zdaniem – bardzo słusznie) za jednego z najwybitniejszych popularyzatorów matematyki na świecie. I już od pierwszego zdania jest jasne, że mamy do czynienia z książką wyjątkową: zbiór matematycznych opowieści i zagadek, kompletowany przez dziesięciolecia przez profesora matematyki, to dzieło unikatowe.

Różnorodność zebranych materiałów jest imponująca. Tytuł, wiążący tematykę książki z zagadkami matematycznymi, jest może nieco mylący; w *Gabinecie...* znajdziemy nie tylko zagadki logiczne i matematyczne (oraz ich rozwiązania), ale także minieseje matematyczne, opowieści dotyczące historii matematyki, ciekawostki, historie powstania wybranych odkryć matematycznych – także tych najnowszych (co odróżnia *Gabinety...* od chociażby *Lilavati* Stefana Jeleńskiego). Spotkamy problemy klasyczne (jak hotel Hilberta, mosty królewieckie czy rozmowy z przybyszami z kosmosu), ale i te zgoła rzadko spotykane w zbiorach zagadek – szczególnie w II części *Gabinetu...*, wydanej po ogromnym sukcesie pierwszej. Lekturę obu tomów *Gabinetów...* można rozpocząć od dowolnej strony; kolejne rozdziały nie są ze sobą powiązane. Książki można więc czytac, jak ujmuje to autor, „z doskoku", w wolnej chwili. Świetnie nadają się na podróż, do czytania w wolnych, krótkich chwilach.



Gabinet matematycznych zagadek i *Gabinet matematycznych zagadek – część II* to książki znakomite. Świetnie przemyślany dobór treści, różnorodnych tak w formie, jak tematyce, przeplatanie zagadek opowieściami o matematyce, jej historii i najnowszych zastosowaniach, o matematykach, zamieszczenie zarówno miniatur prostych, adresowanych do niemającego szczególnej wiedzy matematycznej czytelnika, jak i zagadnień bardziej skomplikowanych – wszystko to składa się na jeden z najciekawszych i do najszerszego grona adresowanych zbiorów matematycznych, jakie pojawiły się w ostatnich latach na polskim rynku wydawniczym. Dodatkowym atutem obu *Gabinetów. . .* , jest wyjątkowej urody forma – mało jest tak elegancko wydanych książek matematycznych, mało tak udanych okładek.

Czytelnicy wydania angielskiego *Gabinetu matematycznych zagadek* bardzo wysoko ocenili tę pozycję – trafiła ona na szóste miejsce krajowej listy bestsellerów, co w przypadku książki o tematyce matematycznej jest nie lada osiągnięciem. Profesor Ian Stewart stworzył ze swoich zbiorów dwie fantastyczne książki – warto po nie sięgnąć.

[Literatura]

[1] Ian Stewart, *Gabinet matematycznych zagadek*, Wydawnictwo Literackie, Kraków 2011, ISBN 978-83-08-04788-0.

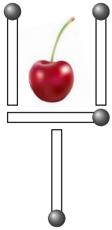
[2] Ian Stewart, *Gabinet matematycznych zagadek. Część II*, Wydawnictwo Literackie, Kraków 2012 , ISBN 978-83-08-04960-0.

Joanna Zwierzyńska

[Konkurs]

Kilka miesięcy temu, myśląc o zbliżającym się pięćdziesiątym numerze [Macierzatora], postanowiłam z okazji tak „okrągłego” wydania zaproponować Czytelnikom zmierzenie się z wybranymi zagadkami matematyczno-logicznymi. Niedługo potem w moje ręce trafiły oba tomy *Gabinetu matematycznych zagadek* profesora Iana Stewarta – i od razu wiedziałam, że to właśnie to. Dzięki uprzejmości i życzliwości Autora oraz Wydawnictwa Literackiego, którzy wyrazili zgodę na przedruk fragmentów obu *Gabinetów. . .* w [Macierzatorze] – za co raz jeszcze serdecznie dziękuję – w numerze umieszczamy wybrane zagadki z obszernych zbiorów profesora Stewarta. Niektóre z nich są bardzo proste, inne - wymagają namysłu. Dwie osoby, które do 15 grudnia 2012 wyślą na adres `macierzator@knm.katowice.pl` najwięcej poprawnych rozwiązań, otrzymają w ramach nagrody oba tomy *Gabinetu matematycznych zagadek*. Jeśli by się zdarzyło, że kilka osób rozwiąże tę samą liczbę zagadek (wszystkie. . . ?), zadecyduje kolejność zgłoszeń. Przyjemnego rozwiązywania!

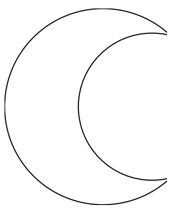
Zagadka 1: Jak wyjąć wisienkę? Ta łamigłówka to klasyka, z prostym, ale nieoczywistym rozwiązaniem. Wisienka koktajlowa tkwi w kieliszku, uformowanym z czterech zapałek. Twoim zadaniem jest przełożyć najwyżej dwie zapałki w taki sposób, by wisienka znalazła się poza kieliszkiem. Kieliszek może być odwrócony do góry dnem albo „leżeć” na boku, ale kształt musi pozostać ten sam.



Zagadka 2: Cyfrowy wiek. Umieść dokładnie trzy symbole matematyczne między cyframi: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 tak aby otrzymać wynik 100. Możesz powtórzyć ten sam symbol, ale każde powtórzenie liczy się do limitu trzech znaków, które masz do wykorzystania. Nie wolno zmieniać kolejności cyfr.

Zagadka 3: Z zestawu „Kolejne trzy szybkie pytania”. Kobieta kupiła papugę w sklepie zoologicznym. Sprzedawca, który zawsze mówi prawdę, stwierdził:
— Gwarantuję, że ta papuga będzie powtarzać każde słowo, które usłyszy.
Po tygodniu klientka przyszła zwrócić papugę, skarżąc się, że ptak nie powiedział ani jednego słowa. — A czy ktoś do niej mówił? — zapytał podejrzliwie sprzedawca.
— O tak.
Jak wyjaśnić milczenie papugi?

Zagadka 4: Jaki kształt ma sierp Księżyca? Księżyc wisi nisko na niebie niedługo po zachodzie słońca albo przed świtem. Jasna część jego powierzchni tworzy tak zwany sierp. Dwie krzywe stanowiące brzegi tego sierpa przypominają łuki okręgów i często są w ten sposób rysowane. Zakładając, że Księżyc jest idealną kulą, a promienie Słońca są równoległe, czy faktycznie są to łuki okręgów?



Zagadka 5: Od słowa do słowa. Wiele łamigłówek, a właściwie większość, prowadzi do poważnych matematycznych problemów, kiedy tylko zaczniemy sobie stawiać ogólniejsze pytania. Wśród łamigłowek słownych istnieją takie, które nazywane są metamorfozami: zaczynamy od jednego wyrazu i przekształcamy go w inny, zmieniając tylko po jednej literze naraz, tak aby w każdym pośrednim kroku uzyskać sensowne słowo. Oba wyrazy, początkowy i końcowy, muszą mieć oczywiście tę samą liczbę liter. Żeby nie wprowadzać zamieszania, nie wolno przestawiać liter. Czyli KOTY można przekształcić w KOZY, ale nie można dojść od KART do KRAT w jednym kroku. Ale można, wykorzystując więcej etapów pośrednich: KART-KORT-KORY-KIRY-MIRY-MIRT-MIOT-MŁOT-PŁOT-PŁAT-PŁAĆ-PRAĆ-BRAĆ-BRAT-KRAT. Zmierz się z takimi dwiema metamorfozami:

- Wprowadź ŁÓDŹ do PORTu.
- Zamień WODĘ w WINO.

Zagadka 6: Zagadka o marynowanych cebulkach. Trzech strudzonych podróżnych przybyło późnym wieczorem do zajazdu i poprosiło gospodarza o przygotowanie czegoś do jedzenia. — Mam tylko marynowane cebulki – mruknął gospodarz.
Podróżni odparli, że mogą być marynowane cebulki, skoro alternatywą jest brak posiłku w ogóle. Gospodarz gdzieś zniknął, aż w końu wrócił ze słoikiem marynowanych cebulek. Do tego czasu wszyscy podróżni zdążyli już zasnąć, więc postawił słoik na stole i sam poszedł do łóżka, zostawiając gości samym sobie.

Obudził się pierwszy podróżny. Nie chcąc wyjść na żarłoka i nie wiedząc, co już jedli pozostali, otworzył słoik, wyrzucił cebulkę, która wyglądała na zepsutą, zjadł jedną trzecią pozostałych, zakręcił słoik i położył się z powrotem spać.

Obudził się drugi podróżny. Nie chcąc wyjść na żarłoka i nie wiedząc, co już jedli pozostali, otworzył słoik, wyrzucił dwie cebulki, które wyglądały na zepsute, zjadł jedną trzecią pozostałych, zakręcił słoik i położył się z powrotem spać.

Obudził się trzeci podróżny. Nie chcąc wyjść na żarłoka i nie wiedząc, co już jedli pozostali, otworzył słoik, wyrzucił trzy cebulki, które wyglądały na zepsute, zjadł jedną trzecią pozostałych, zakręcił słoik i położył się z powrotem spać.

W tym momencie wrócił gospodarz i zabrał słoik, w którym pływało teraz sześć cebulek. Ile było ich na początku?

Zagadka 7: Dziwny przypadek psa. W opowiadaniu sir Arthura Conan Doyle'a o Sherlocku Holmesie *Srebrny płomień* znajdziemy następujący dialog:
— Czy chcesz jeszcze na coś zwrócić mi uwagę?
— Na dziwny przypadek psa nocną porą.
— Pies nocą nic nie zrobił.
— To właśnie był ten dziwny przypadek – zauważył Sherlock Holmes.
Weźmy ciąg: $1, 2, 4, 7, 8, 11, 14, 16, 17, 19, 22, 26, 28, 29, 41, 44$. Pamiętając o uwadze Sherlocka Holmesa, ustal: jaka będzie następna liczba w ciągu?

Zagadka 8: Jakie to liczby?
— Panie i panowie – obwieścił Wielki Chudyni. – Moja asystentka Gderlina poprosi jednego z widzów o ułożenie na stole trzech kart, podczas gdy ja będę miał zawiązane oczy. Następnie poda mi pewne ograniczone informacje, a ja państwu powiem, jakie to karty.
Karty wybrano i ułożono w rządku. Po czym Gderlina wyrecytowała dziwną litanię:
— Na prawo od króla jest dama lub dwie.
— Na lewo od damy jest dama lub dwie.
— Na lewo od kiera jest pik lub dwa.
— Na prawo od pika jest pik lub dwa.
Chudyni natychmiast wymienił trzy leżące na stole karty. Czyli jakie?

Zagadka 9: Statki, które się mijają... W czasach, kiedy podróż przez Atlantyk odbywało się pasażerskimi liniowcami, statek do Nowego Jorku wypływał z Londynu codziennie o 16.00 i przybywał do celu dokładnie 7 dni później.

Codziennie w tej samej chwili (o 11.00, ze względu na różnicę czasu) wyruszał z Nowego Jorku statek do Londynu i przybijał do celu dokładnie po 7 dniach. Wszystkie statki płynęły tą samą trasą, zbaczając z niej lekko, aby uniknąć kolizji, kiedy się mijały.

Ile statków z Londynu spotyka każdy statek płynący z Nowego Jorku podczas transatlantyckiego rejsu, nie licząc spotkań w portach, kiedy jeden statek przybija, a drugi właśnie rusza?

Zadania: 1, 2, 3 i 4 pochodzą z „Gabinetu matematycznych zagadek" Iana Stewarta (ISBN 978-83-08-04788-0, Wydawnictwo Literackie, Kraków 2011), pozostałe – z „Gabinetu matematycznych zagadek. Część II" tego samego Autora (ISBN 978-83-08-04960-0, Wydawnictwo Literackie, Kraków 2012).

Wybór zadań: Joanna Zwierzyńska

[Zbiórka mikołajkowa]

Jak co roku, Koło Naukowe Matematyków organizuje wydziałową zbiórkę mikołajkową. Tym razem dary zostaną przekazane podopiecznym Domu Dziecka w Piekarach Śląskich – to głównie młodzież. Potrzebne są:

- artykuły szkolne;
- kosmetyki;
- gry;
- słodycze;
- środki czystości;
- zabawki.

Dary zbieramy od 3 do 7 grudnia 2012 r. do specjalnie oznaczonych koszy, rozmieszczonych na terenie Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii UŚ. Można też przekazać je bezpośrednio do siedziby Koła (pokój 524 w Instytucie Matematyki UŚ).

Gorąco zachęcamy do zaangażowania się w zbiórkę!
Koło Naukowe Matematyków UŚ

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Tomasz Kania, Tomasz Kochanek, Beata Łojan, Joanna Zwierzyńska
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

listopad 2012

[Kącik TEXowy część 11]

Definiowanie własnych instrukcji, otoczeń i pakietów

Podczas pisania na pewno niejednokrotnie czułeś swego rodzaju irytację, gdy po raz n-ty byłeś zmuszony wpisywać ten sam zwrot czy ciąg instrukcji. W TEXu istnieje możliwość tworzenia własnych poleceń, środowisk, pakietów czy klas. Powiemy jak to robić, a tym samym jak ułatwić i skrócić sobie czas pracy.

Beata Łojan (`bl@wp.eu`)

[Definiowanie własnych poleceń]

Przykładowo, w naszym tekście nowo wprowadzone pojęcia wyróżniamy poprzez pogrubienie, jednak pod koniec pisania uznajemy, że lepiej będzie jeśli wyróżnimy je kursywą. Myślisz sobie: nie, jednak tego nie zmieniam, za dużo pracy — nic bardziej mylnego, w TEXu to kilka sekund. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, TEX jest programem, który pozwola użytkownikom na definiowanie własnych poleceń, otoczeń, pakietów czy klas oraz na redefiniowanie już tych istniejących. Daje to ogromne możliwości oraz pozwala skrócić czas pracy.

Do definiowania nowych poleceń korzystamy z instrukcji:

```
\newcommand{moja_nazwa}[arg]{tekst}
```

Polecenie to posiada dwa argumenty obowiązkowe *moja_nazwa* i *tekst* oraz jeden opcjonalny *arg*. Parametr *moja_nazwa*, to nazwa nowo tworzonego polecenia. Kolejny – *arg* – określa liczbę (obowiązkowych) argumentów nowej instrukcji (maksymalna wartość to 9). Jest on opcjonalny i jego pominięcie spowoduje zdefiniowanie instrukcji bezargumentowej. Ostatni z argumentów – *tekst* – to tekst, jakim ma zostać zastąpione każde wystąpienie nowego polecenia lub ciąg innych już zdefiniowanych instrukcji, które mają zostać wykonane. Można w nim używać standardowych instrukcji LATEXa oraz tych zdefiniowanych przez użytkownika. Nie wolno jednak korzystać z poleceń, które same definiują inne polecenia[1] oraz niedozwolona jest rekursja[2]. Nie można również używać znaków diakrytycznych[3].

Przykładowo w naszym tekście wielokrotnie pojawia się tytuł książki „LATEX – system opracowywania dokumentów”. Wówczas możemy zdefiniować nowe polecenie `\lsod`:

```
\newcommand{\lsod}{\LaTeX\ -- system opracowywania dokumentów}
```

Za każdym razem, gdy w tekście użyjemy polecenia „`\lsod`”, otrzymamy: „LATEX – system opracowywania dokumentów”.

[1] np. `\newcommad`, `\newenvironment`

[2] *Rekursja* inaczej *rekurencja*, to odwoływanie się definicji (funkcji) do samej siebie.

[3] *Znaki diakrytyczne* to znaki graficzne używane w alfabetach i innych systemach pisma, umieszczane nad, pod literą, obok lub wewnątrz niej, zmieniające artykulację tej litery i tworzące przez to nową literę. W języku polskim jest dziewięć liter tworzonych za pomocą znaków diakrytycznych: ą, ć, ę, ł, ń, ó, ś, ź, ż

Wracając do sytuacji z początku paragrafu, pokażemy jak wykorzystać argument opcjonalny *arg*. Na przykład, argument opcjonalny `1`, w kwadratowych nawiasach oznacza, że nowo tworzona instrukcja ma jeden argument. Zaś za pomocą znaczników postaci `#1` (`#2` – drugi parametr itd.), umieszczanych w ostatnim argumencie deklaracji `\newcommand`, określamy w którym miejscu ma zostać wstawiony argument nowej instrukcji.

Lepiej zobrazuje to przykład. Zdefiniujmy w preambule polecenie:

```
\newcommand{pojecie}[1]{\bf #1}
```

Wówczas w tekście do wyróżniania nowych pojęć możemy użyć nowej instrukcji `\pojecie`:

```
\pojecie{nowe pojęcie}
```

co w efekcie daje **nowe pojęcie**. Chcąc zmienić pogrubienie na kursywę wystarczy zamienić `\bf` na `\em` w definicji polecenia:

```
\newcommand{pojecie}[1]{\em #1}
```

co daje *nowe pojęcie*. Wtedy we wszystkich miejscach, gdzie występuje polecenie `\pojecie` LaTeX sam „zmieni” sposób wyróżnienia tekstu.

Możemy również przedefiniować już istniejące polecenie, np. wtedy gdy jego oryginalna wersja jest długa lub gdy chcemy je nieco zmodyfikować do własnych potrzeb. Służy do tego instrukcja:

```
\renewcommand{nazwa}[arg]{tekst}
```

gdzie *nazwa* oznacza nazwę polecenia, które chcemy przedefiniować, zaś znaczenie pozostałych parametrów pozostaje takie jak w przypadku deklaracji `\newcommand`.

Możemy również definiować polecenia, które będą mogły być używane zarówno w trybie matematycznym jak i w trybie wierszowym. Przy definiowaniu tego typu instrukcji powinno się korzystać z polecenia `\ensuremath`, które powoduje, że jego argument jest składany w trybie matematycznym – niezależnie od tego w jakim trybie piszemy. Na przykład:

```
\newcommand{\R}{\ensuremath{\mathbb{R}}}
```

Takie zdefiniowanie polecenia pozwala na używanie go niezależnie od obowiązującego trybu. Skąd wziął się problem? Polecenia `\mathbb` można użyć tylko w trybie matematycznym, czyli w argumencie polecenia `\newcommand`, należałoby użyć znaku `$`. Wtedy polecenia `\R` nie moglibyśmy użyć wewnątrz trybu matematycznego, gdyż pierwszy znak `$` spowodowałby, że TEX wyjdzie z trybu matematycznego i natrafi na polecenie `\mathbb`, ale już w trybie wierszowym. Użycie instrukcji `\ensuremath` rozwiązuje ten problem, gdyż `\ensuremath{\mathbb{R}}` w trybie matematycznym jest równoważne `\mathbb{R}`, zaś w trybie tekstowym `$\mathbb{R}$`.

[Definiowanie własnych środowisk]

W LaTeXu możliwe jest również (re)definiowanie nowych środowisk. Do ich tworzenia możemy użyć polecenia `\newenvironment` będącego odpowiednikiem deklaracji `\newcommand`. Składnia polecenia `\newenvironment` jest następująca:

```
\newenvironment{nazwa}[arg]{poczatek}{koniec}
```

Za pomocą tej instrukcji tworzymy nowe środowisko *nazwa*. Po napotkaniu napisu `\begin{nazwa}` LaTeX wstawia zawartość argumentu *początek*, zaś po napotkaniu `\end{nazwa}` – wstawia zawartość argumentu *koniec*. Znaczenie argumentu opcjonalnego *arg* jest analogiczne jak w przypadku deklaracji `\newcommand`.

Sposób użycia instrukcji `\newenvironment` ilustruje poniższy przykład. Zdefiniujemy nowe środowisko `kacik` o dwóch argumentach obowiązkowych (numer części oraz podtytuł)

```
\newenvironment{kacik}[2]
{\begin{center}{\bf Kącik \TeX owy część #1} \\ {\em #2}\end{center}}
{\begin{center}$\heartsuit \heartsuit \heartsuit $\end{center}}
```

Efekt użycia środowiska `kacik` widoczny jest poniżej:

środowisko `kącik`

[Kącik TEXowy część 1]

Definiowanie własnych poleceń

To jest przykład użycia nowo zdefiniowanego środowiska `kacik`. Jego wywołanie wygląda następująco:

środowisko `kacik`

```
\begin{kacik}{1}{Definiowanie własnych poleceń}
To jest przykład użycia nowo zdefiniowanego środowiska \texttt{kacik}.
Jego wywołanie wygląda następująco:
\begin{kacik}{1}{Podtytuł}
.................
\end{kacik}
\end{kacik}
```

♡♡♡

Istnieje również możliwość zastąpienia już istniejącego środowiska. Należy wówczas skorzystać z instrukcji `\renewenvironment` będącej odpowiednikiem polecenia `\renewcommand`. Składnia tego polecenia jest taka sama jak instrukcji `\newenvironment`, tj.:

```
\renewenvironment{nazwa}[arg]{poczatek}{koniec}
```

[Tworzenie własnych pakietów (i klas)]

W przypadku, gdy definiujemy dużo nowych poleceń i otoczeń, preambuła naszego dokumentu ulega zdecydowanemu wydłużeniu, co zmniejsza czytelność pliku źródłowego i powoduje, że trudniej jest się zorientować w dokumencie. W takiej sytuacji wygodnie jest stworzyć swój własny pakiet zawierający definicje nowych instrukcji i środowisk.

Tworzenie nowego pakietu jest stosunkowo proste. Tworzymy nowy plik, który rozpoczynamy poleceniem:

```
\ProvidesPackage{nazwa_pakietu}
```

i zapisujemy go z rozszerzeniem `.sty`, dokładniej `nazwa_pakietu.sty`. Następnie kopiujemy definicje poleceń z preambuły naszego dokumentu do tego pliku. Tak stworzony pakiet można dołączyć do dokumentu za pomocą instrukcji: `\usepackage`, dokładniej umieszczając w preambule naszego dokumentu:

```
\usepackage{nazwa_pakietu}
```

Należy tutaj pamiętać, aby plik `nazwa_pakietu.sty` umieścić w jednym folderze z plikami, w których chcemy go dołączyć lub podczas dołączania pakietu podać pełną ścieżkę do pliku.

W analogiczny sposób tworzy się klasy dokumentów. W tym przypadku jednak zaprojektowanie całkowicie nowej klasy jest pracochłonne i nie takie proste jak w przypadku pakietów. Ze względu na to, że stworzenie nowej klasy jest bardzo skomplikowane, powiemy tylko, jaka jest zasada, natomiast nie podamy konkretnego przykładu.

Tworzymy nowy plik, który rozpoczynamy poleceniem:

```
\ProvidesClass{nazwa_klasy}
```

i zapisujemy go z rozszerzeniem `.cls`, dokładniej `nazwa_klasy.cls`. Tak stworzoną klasę dołączamy do dokumentu tak jak inne, tj.:

```
\documentclass{nazwa_klasy}
```

Definiowanie własnych poleceń i otoczeń – a w przypadku ich dużej ilości tworzenie własnych pakietów – pozwala nie tylko skrócić czas pracy i zaoszczędzić nam ciągłego przeglądania całego dokumentu, ale również pozwala oddzielić formę od treści dokumentu i posługiwać się formatowaniem logicznym, a nie wizualnym. Ponadto czyni tekst źródłowy bardziej czytelnym.

Literatura

[1] D.E.Knuth, *TEX. Przewodnik użytkownika*, WNT, Warszawa, 2006;
[2] L.Lamport, *LATEX system opracowywania dokumentów*, WNT, Warszawa 2004;
[3] T.Oetiker, H.Partl, I.Hyna, E.Schlegl, *Nie za krótkie wprowadzenie do systemu LATEX2ε*

❊ ❊ ❊