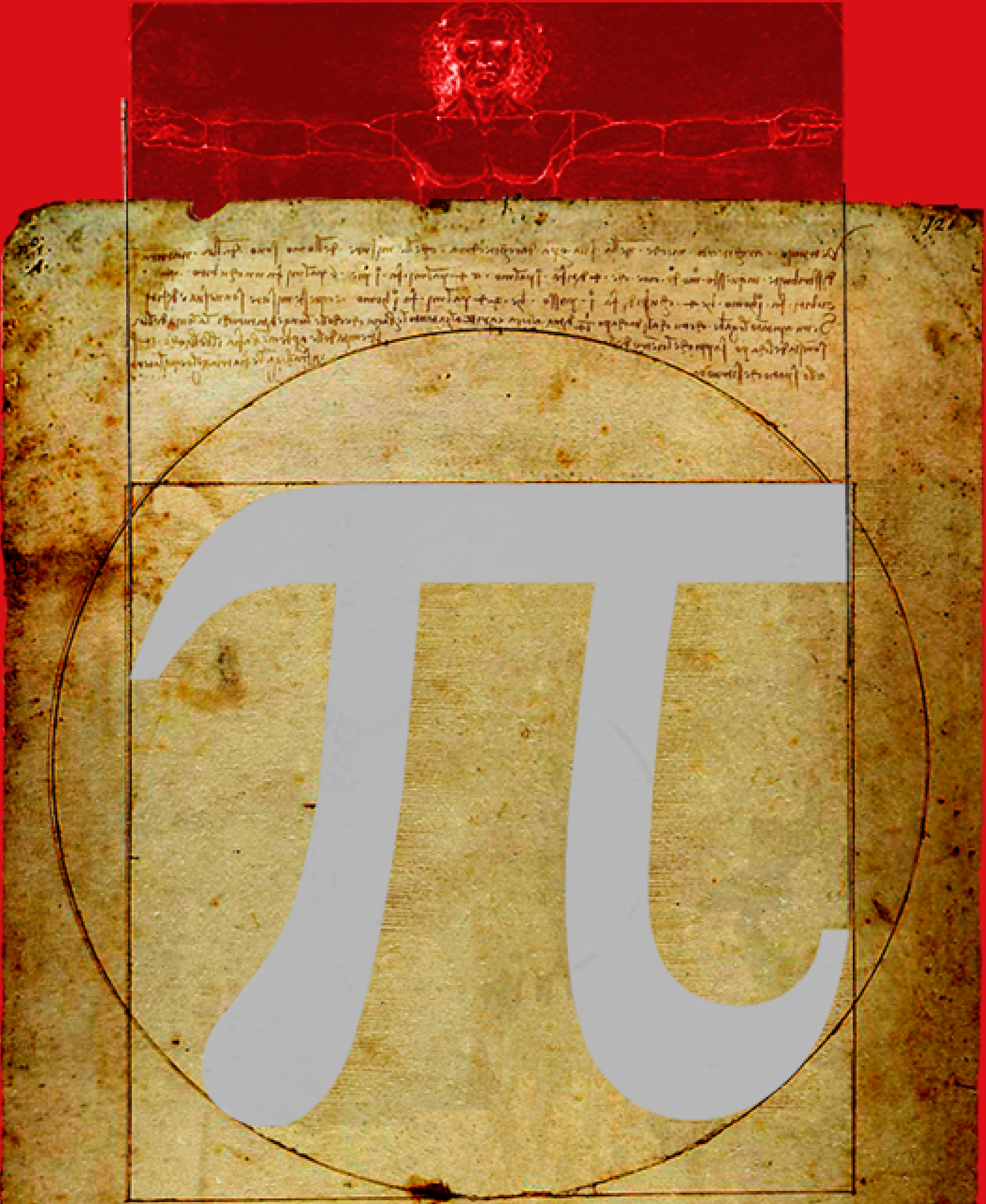


[π-MACIERZATOR]

Miesięcznik redagowany przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

[X ŚWIĘTO LICZBY π — 14 marca 2016 r.]

w Instytucie Matematyki UŚ

HARMONOGRAM

9:42–10:42	Uroczyste otwarcie **X Święta Liczby π** – SA III, Instytut Fizyki. Wykład inauguracyjny *O Archimedesie, o liczbie π i nie tylko* wygłosi dr Krzysztof Ciesielski.
08:00–15:00	Warsztaty KNM UŚ
11:00–12:00	*Krótka historia liczb* – prof. dr hab. Aleksander Błaszczyk
12:00–12:30	*O słowach słów kilka* – dr hab. Przemysław Koprowski
12:30–13:00	*Matematyczne rewolucje w naukach biologicznych* – Sebastian Haratyk
13:00–13:30	*Pitagoras nie tylko w geometrii* – Marcin Fryz
10:00–14:00	Pokazy i warsztaty Pałacu Młodzieży w Katowicach, s. 228 – mgr Dorota Kolany, mgr Justyna Bryś
10:00–12:00	Finał konkursu *Przydoda z matematyką*. Pałac Młodzieży – mgr Dorota Kolany, mgr Justyna Bryś
12:00–14:00	Finał konkursu *Rozkosze Łamania Głowy*. Pałac Młodzieży – mgr Dorota Kolany, mgr Justyna Bryś

WARSZTATY KNM

s. 208:	*Zagadki logiczne 1* (9:00-14:00) – Michał Kolany, Krzysztof Gomółka
s. 209:	*Zagadki logiczne 2* – Grzegorz Heller, Kamil Zwierzyński, Karolina Spigiel
s. 211:	*Zagadki logiczne 3* – mgr Katarzyna Miś, Agnieszka Gawor, Aleksandra Krawiec
s. 216:	*Delfiny, nietoperze i roboty* (8:00, 9:00, 11:00, 12:00) – dr Jolanta Sobera
s. 224:	*Kawiarnia Szkocka* (9:00-14:00) – Martyna Biskup, Łukasz Rak, Kamila Broda, Wojciech Bury, Sebastian Haratyk, Adam Dobosz, Adrian Baziuk, Hanna Ćmiel
s. 225:	*Kasyno* (9:00-14:00) – mgr Roksana Brodnicka, Piotr Mikula, Michał Książek
s. 429:	*Szyfrowanie klasyczne* (10:00, 12:00, 14:00) – Magdalena Wnętrzak
s. 231:	*Fraktale* (9:00–14:00) – Krzysztof Granek, Michał Botor
s. 233:	*π-lionerzy* (9:00–14:00) – mgr Paweł Bialas, mgr Konrad Jałowiecki, Tomasz Kołodziej
s. 553:	*π-knik w π-landii – warsztaty dla najmłodszych* (10:00) – Marta Hernik, Monika Lamprecht
s. 554:	*π-knik w π-landii – warsztaty dla najmłodszych* (10:00) – Małgorzata Gajda, Anna Kłosowska
s. 535:	*Przygoda w π-landii – warsztaty dla szkół podstawowych* (11:15, 12:15, 13:00, 14:00) – Monika Lamprecht, Marta Hernik
s. 625A:	*Programowanie gier w języku Python* (11:00, 13:00) – Marcin Jenczmyk, Andrzej Więckowski

[Od redakcji]

Drodzy Czytelnicy,

w Waszych rękach znajduje się specjalne wydanie [MACIERZATORa], przygotowane z myślą o przypadającym 14 marca Święcie Liczby π. Tym razem przygotowaliśmy artykuły mniej i bardziej trudne, dla uczniów i dla studentów.

Numer otwiera artykuł *Czy wszystkie liczby π są równe?*, dzięki któremu dowiemy się, skąd wiemy, że π w różnych wzorach to... to samo π. O samej liczbie π więcej przeczytamy w kolejnym tekście, zatytułowanym *Marcowe świętowanie*. Z kolei artykuł *Archimedes – uczony wart tysiąca wojowników* przybliży nam postać słynnego starożytnego uczonego. Wszystkie te trzy artykuły napisane zostały z myślą nie tylko o studentach, ale po pierwsze: o uczniach. Tym, którzy dopiero oswajają się z matematyką, polecamy szczególnie *Marcowe świętowanie* i tekst o Archimedesie – nie ma w nich żadnych wzorów!

Dwa ostatnie artykuły są już trudniejsze. W *O ułamkach słów parę* przeczytamy o rozwinięciach okresowych ułamków. Numer zamyka tekst *Wprowadzenie do gier strategicznych*, dzięki któremu poznamy podstawy teorii gier. Przeczytamy o grach o sumie zerowej i przeanalizujemy różne strategie.

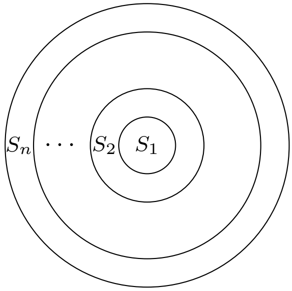
Tradycyjnie już na drugiej i trzeciej stronie okładki znaleźć można harmonogram tegorocznego Święta Liczby π.

Ciekawej lektury
życzy redakcja

[Czy wszystkie liczby π są równe?]

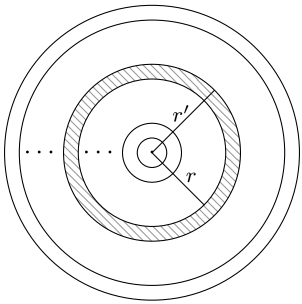
Od najmłodszych lat uczymy się, że długość okręgu o promieniu R wynosi $2\pi R$, a pole koła ograniczonego tym okręgiem – πR^2. Pierwszy ze wspomnianych wzorów jest oczywisty, gdyż – zgodnie z geometryczną definicją – liczba π to stosunek długości okręgu do jego średnicy. Znacznie mniej jasny wydaje się drugi wzór. Ponieważ dowolne koło jest podobne do koła o promieniu 1, a stosunek pól figur podobnych to skala podobieństwa podniesiona do kwadratu, nie dziwi fakt, że pole danego koła jest wprost proporcjonalne do kwadratu jego promienia. Skąd jednak wiemy, że współczynnikiem proporcjonalności jest akurat liczba π?

Na pierwszy rzut oka liczba π, za pomocą której wyrażamy obwód koła, nie ma nic wspólnego z tą liczbą π, która pojawia się we wzorze na jego pole. Oczywiście, próbując się przekonać o równości obu stałych, możemy obliczać przybliżone wartości obwodu i pola danego koła. Metoda ta jednak nie da żadnego ścisłego dowodu. W dalszej części podamy całkowicie elementarne wyprowadzenie wzoru na pole koła o zadanym promieniu R, co będzie odpowiedzią na wcześniej postawione pytanie.



Rysunek 1: Podział koła na pierścienie

Na początek ustalmy sobie (w domyśle dużą) liczbę naturalną n; jeżeli komuś ułatwi to śledzenie dalszego rozumowania, może myśleć, że $n = 1\,000$. Podzielmy teraz nasze koło na n pierścieni jak na rysunku. Dla uproszczenia przyjmiemy, że „grubość" każdego pierścienia jest taka sama i wynosi R/n. Oznaczmy przez S_1 pole pierścienia (właściwie koła) położonego najbliżej środka, pole kolejnego pierścienia przez S_2 itd. Pole zewnętrznego pierścienia jest zatem równe S_n. Oczywiście pole S całego koła wynosi $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$.



Rysunek 2: Pojedynczy pierścień

Oszacujemy teraz pole pojedynczego pierścienia. Niech r będzie jego promieniem wewnętrznym, a r' – zewnętrznym. Zauważmy, że pole takiego pierścienia nie przekracza $2\pi r'(r' - r)$. Zamiast precyzyjnego dowodu wyobraźmy sobie, że po rozcięciu i „rozwinięciu" pierścienia otrzymamy figurę przypominającą trapez o podstawach $2\pi r$ (krótszej) i $2\pi r'$ (dłuższej) oraz o wysokości $r' - r$. Pokazuje to także, że pole rozpatrywanego pierścienia jest równe co najmniej $2\pi r(r' - r)$. Zgodnie z wcześniejszymi założeniami mamy $r' - r = R/n$.

Korzystając z powyższego spostrzeżenia oraz idąc od środka koła, uzyskujemy nierówności:

$$\begin{aligned} 0 \;\le\; S_1 \;&\le\; 2\pi\frac{R^2}{n^2} \\ 2\pi\frac{R^2}{n^2} \;\le\; S_2 \;&\le\; 2\pi\frac{2R^2}{n^2} \\ &\vdots \\ 2\pi\frac{(n-1)R^2}{n^2} \;\le\; S_n \;&\le\; 2\pi\frac{nR^2}{n^2}. \end{aligned}$$

Po dodaniu stronami wszystkich powyższych nierówności i uwzględnieniu, że $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ otrzymujemy:

$$2\pi\frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n^2}R^2 \;\le\; S \;\le\; 2\pi\frac{1+2+\ldots+n}{n^2}R^2. \tag{1}$$

Widzimy, że poszliśmy w dobrym kierunku; co prawda na razie są to tylko nierówności, ale jakieś związki pola koła z liczbą π już się pojawiły. Aby powyższe oszacowania stały się bardziej sympatyczne, musimy obliczyć sumy $1+2+\ldots+(n-1)$ oraz $1+2+\ldots+n$. Oczywiście można to zrobić, stosując wzór na sumę danej liczby początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego, jednak zrobimy to prościej[1]. Zauważmy, że

$$1+2+\ldots+(n-1) = (n-1)+\ldots+2+1.$$

Zatem, grupując odpowiednio składniki, otrzymujemy

$$\begin{aligned} 2\big(1+2+\ldots+(n-1)\big) &= 1+2+\ldots+(n-1)+(n-1)+\ldots+2+1 = \\ &= \big(\underbrace{1+(n-1)}_{=n}\big)+\big(\underbrace{2+(n-2)}_{=n}\big)+\ldots+\big(\underbrace{(n-1)+1}_{=n}\big) = n(n-1). \end{aligned}$$

Stąd mamy $1+2+\ldots+(n-1) = n(n-1)/2$. Analogicznie otrzymujemy $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$ (proste ćwiczenie dla Czytelnika). Wracając do układu nierówności (1), uzyskujemy oszacowania

$$\begin{aligned} 2\pi\frac{n(n-1)}{2n^2}R^2 \;\le\; S \;&\le\; 2\pi\frac{n(n+1)}{2n^2}R^2 \\ \pi\Big(1-\frac{1}{n}\Big)R^2 \;\le\; S \;&\le\; \pi\Big(1+\frac{1}{n}\Big)R^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Jesteśmy już blisko końca. Ponieważ liczba naturalna n była jakakolwiek, układ nierówności (2) spełniony jest dla wszystkich liczb naturalnych. Pomyślmy, że liczba n jest duża; wówczas liczba $1/n$ jest mała. Im większe n

[1] Zastosowana metoda sumowania czasami nazywana jest metodą „tam i z powrotem”.

weźmiemy, tym $1/n$ stanie się bliższe zeru. Biorąc zatem odpowiednio dużą liczbę naturalną n, możemy uczynić $1/n$ dowolnie bliskim zeru. Idąc tym tropem, widzimy, że wyrażenie występujące po prawej stronie nierówności (2) może być dowolnie bliskie πR^2. Skoro tak, to S musi być mniejsze od każdej liczby większej od πR^2, a zatem $S \leq \pi R^2$. Rozważając lewą stronę nierówności (2) oraz rozumując analogicznie, stwierdzamy, że $\pi R^2 \leq S$. Stąd jedyna możliwość $S = \pi R^2$.

Czytelnikowi zaznajomionemu z podstawami analizy matematycznej powiedzielibyśmy, że w nierówności (2) przeszliśmy do *granicy* przy $n \to \infty$. Skoro już wspomnieliśmy o analizie matematycznej, to wypada powiedzieć kilka słów na temat przeprowadzonych rachunków. Otóż rozumowanie takie nazywamy *całkowaniem*. Polega ono na podziale danej wielkości (pola, pola powierzchni, objętości, drogi, momentu bezwładności itd.), trudnej do policzenia bezpośrednio, na małe kawałki, dla których potrafimy to zrobić, a następnie na zsumowaniu tych małych kawałków. Dla Czytelnika znającego rachunek całkowy policzenie żądanego pola byłoby natychmiastowe:

$$S = \int_0^R 2\pi r \,\mathrm{d}r = \pi r^2 \Big|_0^R = \pi R^2.$$

Celem tego artykułu nie było jednak wyjaśnienie powyższego zapisu, a jedynie zwrócenie uwagi na to, że fakt pojawiania się w różnych miejscach w matematyce tej samej (jakże tajemniczej!) liczby π wcale nie jest taki trywialny. Nie wnikając w to, dlaczego liczba π występująca w analizie matematycznej jest tą samą, która pojawia się w geometrii, warto jeszcze zwrócić uwagę chociażby na przestrzeń trójwymiarową. Znowu wydaje się nie do końca jasne, skąd wziął się wzór $4\pi R^2$ na pole powierzchni kuli o promieniu R oraz, o wiele bardziej zagadkowy, wzór $\frac{4}{3}\pi R^3$ na objętość wspomnianej kuli. Do wyników tych prowadzą rozumowania podobne do tego, które zostało przeprowadzone wcześniej, jednak – siłą rzeczy – nieco trudniejsze.

Szymon Draga

[Marcowe świętowanie]

Grecy przez całe wieki zajmowali się matematyką, a ustalenie wartości liczby π traktowali jako istotne i poważne zadanie. Historia pokazuje nam, że należą się im podziękowania, gdyż współczesna matematyka bez liczby π po prostu nie istnieje.

[Starożytne poszukiwania]

Liczba π jest stałą matematyczną, która wyraża stosunek długości obwodu koła do jego średnicy. Najstarsze próby oszacowania tej liczby pochodzą już z Babilonu, gdzie na tabliczce z lat 1900–1700 p.n.e. pojawia się przybliżona wartość π, wynosząca 3,125. Na późniejszym papirusie, bo z około 1600 r. p.n.e., zwanym papirusem Rhinda, możemy znaleźć przybliżenie $\frac{256}{81} \approx 3,16$.

Na bardzo ciekawy fakt zwrócili również uwagę badacze piramidy Cheopsa. Zauważyli oni, że iloraz sumy dwóch boków podstawy piramidy i jej wysokości wynosi 3,1416, co daje zaskakująco dokładne przybliżenie liczby π. Trudno jednak stwierdzić, czy był to tylko przypadek, czy też konsekwencja przemyślanych obliczeń dawnych uczonych.

[Błyskotliwa metoda aproksymacji]

Aproksymacja to metoda, dzięki której na podstawie rozwiązań już znanych można określić przybliżone wyniki, bliskie dokładnym rozwiązaniom. Gdy nie znamy obwodu koła, przez obliczenie obwodu wielokąta foremnego wpisanego w okrąg i opisanego na nim możemy ten obwód w przybliżeniu ustalić. Jest on większy od obwodu wielokąta wpisanego i mniejszy od obwodu wielokąta opisanego na tym okręgu. Dokładność takiego oszacowania liczby π zależy od tego, z ilu boków składa się wielokąt wpisany i opisany na okręgu. Krótko mówiąc, im więcej boków ma wielokąt, tym dokładniejsze jest przybliżenie.

Jako pierwszy tą metodą posługiwał się Archimedes. W swoich obliczeniach wykorzystał wielokąt o 96 bokach i dzięki temu uzyskał przybliżenie do dwóch miejsc po przecinku, czyli 3,14. Dokładniejszy wynik w III wieku n.e. otrzymał chiński matematyk Liu Hui, który swoje obliczenia rozpoczął od wielokąta o 192 bokach, a skończył na wielokącie o 3072 bokach, dzięki czemu uzyskał wartość 3,1416. Do czasów nowożytnych najdokładniejszym przybliżeniem było 3,141592, które w V wieku n.e. otrzymał Zu Chongzhi. Warto dodać, że metodę zapoczątkowaną przez Archimedesa stosował również Ludolf van Ceulen (1540–1610). Do jego osiągnięć należy ustalenie liczby do 35 miejsca po przecinku. Ze względu jego wyczyn liczba π nazywana jest również *ludolfiną*.

[Czasy nowożytne]

Lata badań nad własnościami i wyznaczaniem liczby π przyniosły ogromne efekty. W 1761 r. Johann Heinrich Lambert wykazał, że π jest liczbą niewymierną. Natomiast w 1882 roku niemiecki matematyk Ferdinand Lindemann dowiódł, że liczba π jest liczbą przestępną, czyli nie jest pierwiastkiem wielomianu o wymiernych współczynnikach.

W tym samym czasie podejmowane były próby wyznaczenia jak najdłuższego rozwinięcia dziesiętnego liczby π. W 1789 roku Jurij Vega obliczył 140 miejsc po przecinku, przy czym 126 było prawidłowe, w 1841 roku William Rutherford wyznaczył 208 miejsc po przecinku, z czego 152 było poprawne, a w 1874 roku William Shanks podał 527 miejsc po przecinku. W późniejszych latach wartość liczby π była już określana przy pomocy komputerów. Dzisiaj znane jest ponad 10 bilionów cyfr po przecinku.

Co ciekawe, symbol π został wprowadzony pierwszy raz dopiero w 1706 roku przez Williama Jonesa w książce *Synopsis Palmariorum Mathesos*, a pochodzi on od pierwszej litery greckiego słowa *perimetron*, które oznacza obwód.

[Ku pamięci]

Na cześć liczby π na całym świecie 14 marca (3 – miesiąc, 14 – dzień) obchodzony jest jej dzień. Do tradycji tego święta należą konkursy, wystąpienia i spotkania w gronie akademickim. Ważnym wydarzeniem jest również bicie rekordu Guinessa w recytacji największej ilości cyfr po przecinku. Ostatni z rekordów należy do Akiry Haraguchiego, który podał z pamięci 100 tysięcy miejsc po przecinku, co zajęło mu 16 godzin.

Dla tych, którzy chcieliby nauczyć się wielu cyfr rozwinięcia liczby π, istnieje pewien niebanalny sposób. Tworzone są wierszyki, w których długość każdego kolejnego słowa jest równa kolejnej cyfrze w rozwinięciu dziesiętnym liczby π. Na przykład:

Kto w mózg i głowę natłoczyć by chciał cyfer moc,
Ażeby liczenie ludolfiny trudnej spamiętać móc,
To nam zastąpić musi słówka te litery suma,
Tak one trwalej się do pamięci wszystkie wsuną.

Inny przykład to okolicznościowy wierszyk, który powstał z okazji Mistrzostw Świata w Piłce Nożnej w Argentynie w 1978 roku:

Już i Lato i Deyna strzelili do bramki obcej dwa karne. Lubański dostrzegł mistrza Szarmacha, gdy on tak wypuścił cios szacha, że zdobyć musi cel gry krzyknął Gol na Mundial Argentyna.

Kamila Broda

[Archimedes – uczony wart tysiąca wojowników]

Zapewne wszyscy z Was kojarzą imię greckiego matematyka z Syrakuz (287–212 r. p.n.e.) – ze względu na jedną z najbardziej znanych anegdot o starożytnych uczonych. Poproszony jakoby przez króla Syrakuz Hierona II o zbadanie, czy korona władcy została wykonana całkowicie ze złota, wymyślić miał rozwiązanie podczas kąpieli, gdy wydało mu się, iż ciężar jego ciała w wodzie maleje. Wpadł wtedy ponoć na pomysł, jak sprawdzić uczciwość złotnika: przez zanurzenie czystego kruszcu oraz korony w wodzie i porównanie ilości wypartej wody. Anegdotę ubarwia obraz wybiegającego nago na ulicę, wykrzykującego słynne „Heureka" uczonego. Oczywiście, to jedynie legenda, ale sformułowanie podstaw prawa wyporu to niewątpliwie jedno z wielu znamienitych osiągnięć Archimedesa. Poza wynalazkami praktycznymi (jak np. pompa ślimakowa do spiętrzania wody) zajmował się on wieloma zagadnieniami teoretycznymi, znacznie poszerzając wiedzę matematyczną. W orbicie jego zainteresowań znalazły się – a jakże! – również zagadnienia związane z liczbą π. Mimo posługiwania się nieporęcznym systemem niedziesiętnym udało mu się, dzięki obliczeniom, zawęzić wartość liczby π do przedziału $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ (ułamek $\frac{22}{7}$).

Złotymi głoskami w historii wojskowości zapisał się Archimedes podczas drugiej wojny punickiej. Kiedy wnuk i następca Hierona II, Hieronim, zerwał z dotychczasową polityką równowagi Syrakuz między Kartaginą i Rzymem, opowiadając się po stronie Kartaginy, na reakcję Rzymian nie trzeba było długo czekać. Według wszystkich relacji – Liwiusza, Plutarcha i Polibiusza – potężna armia rzymska, dowodzona przez Marcellusa, liczyła na szybkie zdobycie Syrakuz. Jednak, jak powiada Liwiusz, Marcellus wziął pod uwagę wszystko za wyjątkiem jednego człowieka – Archimedesa. Grecki uczony swą sławę w Rzymie w późniejszych latach zawdzięczał nie osiągnięciom naukowym, lecz przede wszystkim technicznym: jako konstruktor machin wojennych. Rozmieszczał on na murach przeróżnej wielkości miotacze pocisków, które druzgotały atakujących. Napastników przerażały najbardziej skonstruowane przez niego urządzenia, służące do podnoszenia okrętów nadpływających Rzymian. Jak pisze Plutarch w *Żywotach sławnych mężów*, Marcellus uznać miał wyższość przeciwnika, krzycząc: „Może przerwiemy tę wojnę z tym Briareusem matematyki", a sam Plutarch dodał komentarz dość trafnie zapewne opisujący morale atakujących: „Było tak, jakby Rzymianom przyszło walczyć z bogami". Mający znaczącą przewagę liczebną Rzymianie zrezygnować musieli z natarcia i ograniczyli się do wielomiesięcznej blokady Syrakuz. Ostatecznie o losach oblężenia przesądziła dopiero dziesiątkująca obrońców zaraza oraz zdrada, jakiej dopuścił się jeden z kapłanów, który chcąc ratować własną skórę, wpuścił oblegających do miasta. Wśród ofiar niestety znalazł się Archimedes. Plutarch podaje wiele wersji jego śmierci; w większości z nich uczony zginął zabity przez rzymskiego żołnierza podczas rozwiązywania zadania matematycznego. Natomiast nie ulega wątpliwości, iż Marcellus wielce bolał nad śmiercią swego wielkiego rywala, gdyż niezmiernie cenił greckiego uczonego. Archimedes pochowany został, zgodnie z własnym życzeniem, w grobowcu w kształcie kuli wpisanej w walec.

Jak widzimy, uczeni potrafili wpływać również na... historię wojen. Na przestrzeni wieków, od starożytności i Archimedesa po współczesność i spektakularne złamanie kodu Enigmy.

Jan Zwierzyński

[O ułamkach słów parę]

Długość okresu rozwinięcia ułamka

W dzisiejszym artykule pod lupę weźmiemy rozwinięcia okresowe ułamków i spróbujemy znaleźć sposób, by wyznaczyć długość tychże.

W zapisie dziesiętnym ułamki liczb naturalnych postaci $\frac{m}{n}$ mają rozwinięcie nieskończone okresowe, o ile tylko mianownik po sprowadzeniu ułamka do najprostszej postaci nie jest postaci $2^p \cdot 5^q$. Dla przykładu $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ma okres o długości sześciu cyfr[2], natomiast ułamek $\frac{17}{110} = 0.1\overline{545}$ ma tylko dwie cyfry w okresie.

Uwaga. Ułamki typu $0.\overline{9}$ zawsze będziemy utożsamiać z 1, np. liczba $0.4\overline{9} = 0.5$ nie będzie traktowana jako ułamek okresowy.

Okazuje się, że można jawnie wyrazić długość okresu ułamka. Przed tym wprowadzimy parę oznaczeń[3], którymi będziemy operować.

Oznaczenie. Resztę z dzielenia liczby m przez liczbę n oznaczać będziemy jako $(m)_n$.

Przykładowo $(41)_9 = 5$, ponieważ $41 = 9 \cdot 4 + \underline{5}$.

Oznaczenie. Zbiór liczb naturalnych względnie pierwszych z k mniejszych od k oznaczać będziemy symbolem $\mathbb{Z}_k^*$.

Dla przykładu $\mathbb{Z}_{12}^*$ składa się z liczb 1, 5, 7 oraz 11 – dla pozostałych najwyższy wspólny dzielnik z 12 jest większy od 1.

By móc opisać długość okresu ułamka potrzebujemy pojęcia *rzędu* elementu. Dla liczby n względnie pierwszej z k możemy określić jej rząd w grupie multyplikatywnej $\mathbb{Z}_k^*$: *jest to najmniejsza liczba naturalna l, dla której $n^l \equiv 1 \pmod{k}$. Przyjmijmy oznaczenie $r_k(n) = l$.*

Dla wprawy obliczmy rząd 3 w grupie $\mathbb{Z}_{10}^*$: zachodzi $3^2 \equiv 9 \not\equiv 1 \pmod{10}$, $3^3 \equiv 7 \not\equiv 1 \pmod{10}$, ale $3^4 \equiv 1 \pmod{10}$. Zatem $r_{10}(3) = 4$. Oczywiście, możemy sprawdzić rząd $r_3(10)$, wówczas 10 utożsamiamy z $(10)_3 = 1$. A więc $r_3(10) = 1$.

Jesteśmy gotowi, by przystąpić do przedstawienia naszego twierdzenia.

Twierdzenie 1. *Niech $\frac{m}{n}$ będzie ułamkiem sprowadzonym do najprostszej postaci, dodatkowo niech $n = k \cdot 2^p \cdot 5^q$ dla pewnych $p, q \in \mathbb{N}_0$. Wówczas długość okresu jest równy rzędowi liczby 10 w grupie multyplikatywnej $\mathbb{Z}_k^*$, tj. $r_k(10)$.*

[2] Zapis $0.\overline{285714}$ oznacza $0.28571428571428\ldots$.

[3] Od Czytelnika wymagać będziemy jedynie znajomości podstaw kongruencji.

Istotnie, w naszym pierwszym przykładzie $r(10) = r(3) = 6$, ponieważ $3^6 \equiv 1 \pmod 7$ oraz $3^l \not\equiv 1 \pmod 7$ dla $0 < l < 6$, natomiast, $r(11) = r(-1) = 2$ – z racji faktu, iż $(-1)^2 = 1$.

By dowieść podane wyżej twierdzenie, wystarczy przyjrzeć się zwykłemu dzieleniu pisemnemu. Spróbujmy uprzednio zobaczyć na przykładzie $\frac{2}{7}$, co się dzieje podczas dzielenia pod kreską, by móc wyabstrahować cały ten proces i podać ogólny algorytm dzielenia – co więcej nie tylko dla systemu dziesiętnego.

$$
\begin{array}{rl}
\underline{0.285714} & \\
2|7 & \\
\underline{-0} & \\
2\,0 & \text{reszta 2 z dzielenia} \\
\underline{-1\,4} & \\
60 & \text{reszta 6 z dzielenia} \\
\underline{-56} & \\
40 & \text{reszta 4 z dzielenia} \\
\underline{-35} & \\
50 & \text{reszta 5 z dzielenia} \\
\underline{-49} & \\
10 & \text{reszta 1 z dzielenia} \\
\underline{-\ \ 7} & \\
30 & \text{reszta 3 z dzielenia} \\
\underline{-28} & \\
2 & \text{reszta 2 z dzielenia – powtarza się.}
\end{array}
$$

Licząc dalej, można się przekonać, że faktycznie dalsze cyfry zaczynają się powtarzać.

Spróbujmy zobaczyć, jak będzie wyglądać dzielenie pisemne w ogólnym przypadku – posiłkować będziemy się schematem powyżej, tyle że zamiast konkretnych cyfr używać będziemy symboli. Cyfry będziemy oznaczać ciągiem (x_i), natomiast ciąg (y_i) stanowić będzie ciąg kolejnych reszt występujących podczas dzielenia. Ponieważ interesuje nas część po przecinku, pierwsza „cyfra" będzie po prostu częścią ułamkową: $x_0 = \left\lfloor \frac{m}{n} \right\rfloor$, a pierwsza reszta będzie tym, co pozostało: $y_0 = (m)_n$. W naszym przypadku z przykładu $x_0 = 0$, a $y_0 = 2$.

Pierwszą cyfrę po przecinku możemy łatwo wyznaczyć: dopisując jedno zero do reszty (w ogólnym przypadku znaczy to przemnożenie przez b) i dzieląc przez n:

$$x_1 = \left\lfloor \frac{b\,y_0}{n} \right\rfloor.$$

Dla ułamka $\frac{2}{7}$ pierwsza cyfra po przecinku wynosiła $\left\lfloor \frac{20}{7} \right\rfloor = 2$. By znaleźć kolejną cyfrę, w kolejnym kroku należy obliczyć następującą różnicę:

$$y_1 = y_0 b - x_1 n.$$

Odpowiada to odejmowaniu $6 = 20 - 14$. Procedurę postępowania powtarzamy:

$$x_i = \left\lfloor \frac{b\, y_{i-1}}{n} \right\rfloor, \quad y_i = y_{i-1}b - x_i n.$$

I tak właśnie wygląda algorytm dzielenia. Jak to ma się do podanego twierdzenia? Przede wszystkim wystarczy zauważyć, że $y_i = \left(y_0\, b^i\right)_n$. A to już prowadzi praktycznie bezpośrednio do naszego twierdzenia. W przypadku gdy $\mathrm{NWD}(b, n) = 1$, jesteśmy w domu: dla któregoś i reszta się powtórzy: $y_0 \equiv y_0\, b^i \pmod{n}$ (musi, chociażby z zasady szufladkowej Dirichleta – zbiór reszt jest skończony) – a najmniejsze i różne od zera, dla którego ta kongruencja zachodzi – stanowi właśnie rząd b w grupie $\mathbb{Z}_n^*$. Warto nadmienić, że dla przykładu $\frac{2}{7}$ reszty w rozwinięciu dziesiętnym były jednocyfrowe. W ogólnym przypadku reszty należy traktować jakby miały n cyfr (oczywiście w systemie o podstawie b).

By ustalić sytuację, gdy $\mathrm{NWD}(b, n) > 1$, potrzebne jest „techniczne" obejście problemu: należy wyodrębnić z mianownika n dzielniki b, a więc dokonać rozkładu poniższej postaci:

$$n = k \cdot p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\beta_j},$$

gdzie $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\alpha_j}$ jest rozkładem liczby b na czynniki pierwsze. Ponieważ potęgi dzielników pierwszych liczby b nie wpływają na długość okresu[4], a k jest względnie pierwsze z b, można przejść z badania grupy multyplikatywnej $\mathbb{Z}_n^*$ do grupy $\mathbb{Z}_k^*$ i zastosować uprzednio wyprowadzony wniosek.

Tym samym udowodniliśmy szersze twierdzenie, nie tylko dla rozwinięć dziesiętnych:

Twierdzenie 2. *Niech $\frac{m}{n}$ będzie ułamkiem sprowadzonym do najprostszej postaci, dodatkowo niech $n = k \cdot p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\beta_j}$. Wówczas długość okresu w rozwinięciu o podstawie $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_j^{\alpha_j}$ wynosi $r_k(b)$.*

Dzięki tej wiadomości wiemy już, że długości rozwinięć ułamków nie są bliżej nieokreślonymi koincydencjami. Co możemy wysnuć na podstawie tego twierdzenia? Przykładowo:

Wniosek 1. *Długość okresu ułamka $\frac{1}{n}$ nie przekracza $n - 1$.*

Zacznijmy od faktu, że zbiór liczb mniejszych od n i względnie pierwszych z n, a więc dokładnie $\mathbb{Z}_n^*$, ma zawsze co najwyżej $n - 1$ elementów – a przypadek „graniczny" zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

[4] Ta część techniczna zostanie pominięta.

Jest też jasne, że rząd elementu nie może być większy niż $n-1$[5], a to już jest równoważne z przedstawioną tezą.

Zależności wiążących postać ułamka z długością jego okresu w rozwinięciu dziesiętnym jest więcej. Na zakończenie chętnych wykorzystania nowo poznanej wiedzy zachęcam do rozwiązania poniższych zadań:

Zadanie 1. Wyznacz długość okresowego rozwinięcia dziesiętnego ułamków o mianownikach postaci 10^n-1, 11^n oraz 3^n.

Zadanie 2. Wykaż, że ułamek $\frac{m}{n}$, gdzie $\mathrm{NWD}(m,n)=1$, ma okres tej samej długości co $\frac{1}{n}$.

Zadanie 3. Sprawdź, że jedynie ułamki postaci $\frac{m}{3}$, gdzie $\mathrm{NWD}(m,3)=1$, mają okres o długości 2 w systemie dwójkowym. Dlaczego nie istnieją w tym systemie liczby o okresie długości 1?

Zadanie 4. Udowodnij, że jeżeli ułamek ma okres długości 2 w rozwinięciu dziesiętnym, to ma mianownik postaci $2^k \cdot 3^l \cdot 5^m$ gdzie l wynosi 1 albo 2.

Zadanie 5. Udowodnij, że mianowniki ułamków o okresie długości 11 dzielą 21649 lub 513239 (w systemie dziesiętnym).

Mateusz Szymański

[Wprowadzenie do gier strategicznych]

Teoria gier jest dziedziną matematyki badającą modele sytuacji, w których podmiot, czyli gracz, podejmuje decyzje. Swoją genezę zawdzięcza ona badaniom nad grami hazardowymi. Obecnie jednak znajduje zastosowanie w dziedzinach takich jak ekonomia, filozofia, biologia, antropologia, socjologia, psychologia i w wielu innych gałęziach nauki, m.in. w tych, w których można rozpatrywać konflikt. W tym artykule skupimy się właśnie na takich grach. Gracza, w zależności od dziedziny problemu, można utożsamiać z człowiekiem, przedsiębiorstwem, naturą, genami itd. Gracz przez udział w grze może zyskać bądź stracić. Gracz może brać udział w konflikcie dotyczącym zysku materialnego, zwycięstwa genów, sposobu prowadzenia przedsiębiorstwa, strategii wojskowej, a nawet wolnej woli. Pojęcia używane w teorii gier są więc abstrakcyjne.

[5]Bez znajomości teorii grup bądź też silniejszej wersji małego twierdzenia Fermata – twierdzenia Eulera – możemy udowodnić ten fakt formalnie. Załóżmy nie wprost, że dla liczny naturalnej n istnieje element $k \in \mathbb{Z}_n^*$ o własności $r_n(k) \geqslant n$, a więc $k^l \not\equiv 1 \pmod n$ dla wszystkich $1 \leqslant l < n$. Ponieważ możliwych reszt modulo n jest co najwyżej $n-1$, z zasady szufladkowej Dirichleta istnieją dwie takie różne liczby l_1 oraz l_2, że zachodzi $k^{l_1} \equiv k^{l_2} \pmod n$, przyjmijmy bez straty ogólności $l_2 > l_1$. Stąd $k^{l_2} - k^{l_1} \equiv 0 \pmod n$, a co za tym idzie – $k^{l_1}\left(k^{l_2-l_1}-1\right) \equiv 0 \pmod n$. Oczywiście $k^{l_1} \not\equiv 0 \pmod n$, więc wbrew założeniu znaleźliśmy liczbę mniejszą od n realizującą $k^{l_2-l_1} \equiv 1 \pmod n$. Sprzeczność.

Głównym nurtem badań teorii gier są gry, w których zakłada się, iż gracze zachowują się racjonalnie. W tym artykule uczynimy założenie o racjonalności graczy. Oznacza to, że zakładamy, iż uczestnicy gry chcą zdobyć jak największą możliwą wygraną. Skupimy się tutaj również na grach o sumie zerowej. Są to gry, w których interes obu graczy jest przeciwstawny, tzn. jeśli jeden z nich przy jakimś rozwiązaniu zyskuje a, to drugi traci $-a$. Zobrazujmy to przykładem:

Gracz 2

Gracz 1		A_2	B_2	C_2	D_2
	A_1	(12;-12)	(-1;1)	(1;-1)	(0;0)
	B_1	(-15;15)	(1;-1)	(7;-7)	(-20;20)
	C_1	(3;-3)	(2;-2)	(4;-4)	(3;-3)
	D_1	(-16;16)	(0;0)	(0;0)	(16;-16)

W powyższej grze, zobrazowanej macierzą, czyli tablicą z wartościami, mamy dwóch graczy, Gracza 1 i Gracza 2. Możliwe rozwiązania gry znajdują się w iloczynie kartezjańskim, czyli zbiorze par uporządkowanych, zbiorów strategii (czyli konkretnych planów działania). Gracza 1 $\{A_1, B_1, C_1, D_1\}$ i Gracza 2 $\{A_2, B_2, C_2, D_2\}$. Wszystkie punkty typu $(a, -a)$, będące wartościami w macierzy, gdzie a jest możliwym zyskiem bądź stratą (w uproszczeniu wypłatą) Gracza 1, natomiast $-a$ wypłatą Gracza 2, nazywać będziemy parami uporządkowanymi. Liczbę a nazywać będziemy pierwszą współrzędną, z kolei $-a$ drugą współrzędną.

Wartości wypisane z macierzy odpowiadają poszczególnym strategiom graczy. Jeśli przykładowo Gracz 1 wybierze strategię B_1, to może wygrać $-15, 1, 7, -20$. Wartość jego wygranej zależeć będzie jednak od wyboru strategii przez Gracza 2. Przykładowo, jeśli Gracz 2 wybierze strategię A_2, to rozwiązanie tej gry będzie w punkcie (B_1, A_2) o wartości $(-15, 15)$. Oznaczać to będzie, iż Gracz 1 straci -15, a Gracz 2 zyska 15.

W celu lepszego zrozumienia wprowadzonych we wstępie pojęć rozważmy hipotetyczny przebieg gry. Zastanówmy się, czy istnieje strategia, która Graczowi 2 zagwarantuje największą wygraną, czyli 20, którą może uzyskać stosując strategię D_2. Gracz 2 może zyskać taką wypłatę tylko i wyłącznie wtedy, gdy Gracz 1 wybierze strategię B_1. Czy Gracz 1 ma powody do wyboru tej strategii? Prześledźmy co może myśleć.

Jeśli zagram strategię B_1, to mój rywal, grając odpowiednio strategię A_2, doprowadzi mnie do straty -15, grając B_2, sprawi, że wygram tylko 1, jeśli zagra C_2, to wygram 7, to już coś, ale jak zagra strategią D_2, to przegram -20. Zbyt duże ryzyko. Chyba wolę zagrać strategią C_1, gdyż niezależnie od wyboru strategii przez Gracza 2 zawsze coś wygram.

Gracz 1 uczynił słuszne spostrzeżenie. Zauważył, że ma strategię C_1, która zawsze daje mu wygraną. Jeśli Gracz 2 zagrałby strategią D_2, w nadziei na najwyższą wygraną, a Gracz 1 zagrałby C_1, to chciwy Gracz 2 przegrałby -3. Jak widać trudno na pierwszy rzut oka wskazać optymalną strategię dla Gracza 2. W celu dalszej analizy wykorzystamy pewną prawidłowość, którą zauważyliśmy. Gracz 1 ma strategię C_1, stosując którą nie może przegrać. Dla Gracza 2 natomiast nie istnieje strategia, w której wygrywa za każdym razem. Jeśli Gracz 2 jest sprytny i to zauważy, to jako racjonalny gracz powinien pogodzić się z przegraną i zminimalizować stratę. W tym wypadku będzie to wybór strategii B_1. Wybierając tę strategię, przy strategii rywala C_2 przegra tylko -2. Zobaczmy, czy profesjonalne narzędzia teorii gier dadzą nam ten sam rezultat.

Przez dominację jednej strategii nad drugą rozumiemy taką sytuację, w której zdominowanej strategii nie opłaca się stosować, ponieważ istnieje strategia dominująca, która w każdym przypadku daje lepszą wygraną. Z kolei przez słabą dominację jednej strategii nad drugą rozumiemy taką sytuację, w której użycie dominującej strategii daje co najmniej równą (czyli większą bądź taką samą) wygraną niż użycie strategii zdominowanej. Racjonalni gracze nie stosują strategii zdominowanych (słabo zdominowanych), gdyż mogą zyskać co najmniej tyle samo, stosując strategię dominującą. Oznacza to, iż macierz gry można uprościć, wykreślając strategie zdominowane.

Patrząc na naszą grę z perspektywy Gracza 1, należy więc wykluczyć ten wiersz, którego pierwsza współrzędna, w każdej kolumnie, jest mniejsza bądź równa od innych pierwszych współrzędnych w innych wierszach. Z perspektywy Gracza 2 należy wykluczyć kolumnę, w której każda druga współrzędna, w każdym wierszu, jest mniejsza bądź równa od innych, drugich współrzędnych w kolumnach. Dla Gracza 1 nie ma takiej sytuacji. Natomiast dla Gracza 2 strategia B_2 wyraźnie słabo dominuje strategię C_2. Istotnie, $1 \geq -1; \quad -1 \geq -7; \quad -2 \geq -4; \quad 0 \geq 0.$

Zredukowana macierz gry wygląda następująco:

Gracz 2

Gracz 1		A_2	B_2	D_2
	A_1	(12;-12)	(-1;1)	(0;0)
	B_1	(-15;15)	(1;-1)	(-20;20)
	C_1	(3;-3)	(2;-2)	(3;-3)
	D_1	(-16;16)	(0;0)	(16;-16)

Dla gier o sumie zerowej można zdefiniować pojęcie punktu siodłowego. Jest to taka wartość macierzy $(a, -a)$, która gwarantuje bezpieczną wygraną dla obu graczy. Gwarantuje bowiem uzyskanie co najmniej wyniku a dla Gracza 1 i co najmniej wyniku $-a$ dla Gracza 2. Uznaje się, iż racjonalni gracze powinni wybierać strategie zawierające punkt siodłowy, gdyż gwarantują sobie w ten sposób uzyskanie wypłaty maksymalizującej ich zysk (odpowiednio minimalizującej straty) bez względu na wybór strategii przez przeciwnika. Punkt siodłowy, o ile istnieje, jest jednoznaczny co do wartości.

Zgodnie z intuicją, aby wyznaczyć punkty siodłowe gry należy zastanowić się nad minimalizacją straty. W tym celu wybiera się minimalne możliwe wypłaty w poszczególnych strategiach odpowiednio dla Gracza 1 i Gracza 2. Następnie próbuje się zmaksymalizować zysk przez wybór maksymalnej wartości wśród wybranych par uporządkowanych, zawierających minimalne wygrane dla poszczególnych graczy. Taką parę uporządkowaną nazywa się maksyminem, czyli maksimum z minimum. Jeśli maksymin dla obu graczy jest taki sam, to jest on punktem siodłowym gry. Wyznaczmy teraz punkt siodłowy dla poniższej gry.

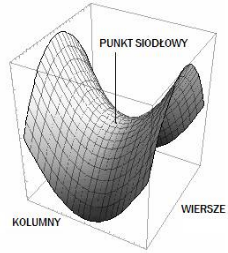
Gracz 2

Gracz 1

	A_2	B_2	D_2	punkt z min Gracza 1
A_1	(12;-12)	(-1;1)	(0;0)	(-1;1)
B_1	(-15;15)	(1;-1)	(-20;20)	(-20;20)
C_1	(3;-3)	(2;-2)	(3;-3)	**(2;-2)**
D_1	(-16;16)	(0;0)	(16;-16)	(-16;16)
punkt z min Gracza 2	(12;-12)	**(2;-2)**	(16;-16)	

Wytłuszczonym drukiem zostały zaznaczone maksyminy. Mają one taką samą wartość dla poszczególnych graczy, więc są punktem siodłowym. Co ciekawe, punkt siodłowy pasuje do naszej wcześniejszej analizy – jest to para strategii (C_1, B_2).

Nazwa tego punktu bierze się od jego interpretacji geometrycznej. Pary uporządkowane w grach o sumie zerowej mają przeciwstawne wartości na poszczególnych współrzędnych $(a, -a)$. Maksymin Gracza 2 można więc wyznaczyć jako minmax Gracza 1 w kolumnach. Wartości z macierzy wypłat leżą na wykresie typu:



Punkt siodłowy będzie natomiast punktem, wokół którego rozmieszczone będą inne wartości. Mnogość punktów siodłowych nie zmienia interpretacji geometrycznej, gdyż na powyższym wykresie leżą punkty z macierzy wypłat, a tak jak wspomniałam wcześniej punkt siodłowy jest jednoznaczny do co wartości. Gry z punktem siodłowym nazywamy grami ze strategią czystą.

Nie każda gra jednak musi mieć punkt siodłowy.

Gracz 2

Gracz 1

	A_2	B_2	punkt z min Gracza 2
A_1	(-2,2)	(3,-3)	(-2,2)
B_1	(0,0)	(-1,1)	**(-1,1)**
punkt z min Gracza 1	**(0,0)**	(3,-3)	(-1,1)

Wytłuszczonym drukiem zostały zaznaczone maksyminy. Ponieważ nie są równe, gra nie ma punktów siodłowych. Na pierwszy rzut oka trudno cokolwiek powiedzieć o tej grze. Gracz 1, grając strategią A_1, może przegrać -2, ale i wygrać 3. Stosując z kolei strategię B_1, może nic nie wygrać lub stracić -1. Gracz 1 ma więc dylemat pomiędzy stosunkowo dużą wygraną i dużą stratą, a pomiędzy brakiem wygranej, a porażką.

Dla gier, które nie mają punktów siodłowych nie da się wyznaczyć bezpiecznej, jednorazowej strategii. Zabawa zaczyna się, gdy gracze grają w jedną grę kilka razy. Można wtedy zastosować strategię wyrównującą, mieszaną. Odpowiednia strategia mieszana pozwala graczom zminimalizować straty, bez względu na zastosowane strategie przez przeciwnika. Strategię wyrównującą oblicza się na podstawie prawdopodobieństwa, z jakim gracze powinni stosować daną strategię, aby zapewnić sobie optymalną wygraną. Warto wspomnieć, że wybieranie strategii z odpowiednim prawdopodobieństwem powinno być losowe, istnieje bowiem ryzyko, iż przeciwnik wychwyci naszą taktykę i wykorzysta ją przeciwko nam.

Wróćmy jednak do meritum. Aby obliczyć strategię wyrównującą dla Gracza 1, należy wyliczyć jego średnią wypłatę, jaką może uzyskać, niezależnie od tego, jaką jego rywal zastosuje strategię. W matematyce średnią wartość nazywa się wartością oczekiwaną bądź nadzieją matematyczną. W celu jej obliczenia należy posłużyć się prawdopodobieństwem użycia poszczególnych strategii przez Gracza 1. Niech p_{A_1} będzie oznaczać prawdopodobieństwo użycia strategii A_1 przez Gracza 1, a p_{B_1} prawdopodobieństwo użycia przez niego strategii B_1. Przypominam, iż zgodnie z definicją wartość prawdopodobieństwa jest nieujemna i mniejsza bądź równa 1. Wartości wszystkich możliwych prawdopodobieństw danego zdarzenia sumują się do 1. Czyli $p_{B_1} = 1 - p_{A_1}$. Adekwatnie definiujemy obiekty p_{A_2}, p_{B_2} jako prawdopodobieństwa wyboru odpowiednio strategii A_2, B_2 przez Gracza 2. Jeżeli $-2, 0$, to odpowiednio wartości, jakie może zyskać Gracz 1, gdy jego przeciwnik zastosuje strategię A_2, to wartość oczekiwana wypłaty Gracza 1, gdy Gracz

2 zastosuje strategię A_2, oznaczamy $\mathbb{E}G_{A_2}$ i obliczamy jako sumę iloczynów wypłaty dla Gracza 1 razy prawdopodobieństwo użycia przez niego danej strategii, $\mathbb{E}G_{A_2} = -2 \cdot p_{A_1} + 0 \cdot (1 - p_{A_1})$. Wracając do naszej nadziei matematycznej: jeżeli jej wartość będzie mniejsza niż 0, to osoba stosująca strategie zgodnie z wyliczonym prawdopodobieństwem średnio może liczyć na stratę, a jeśli większa niż 0, to na zysk.

W celu obliczenia strategii wyrównującej dla Gracza 1 należy wyliczyć prawdopodobieństwo, z jakim powinien on użyć swoich strategii, aby uzyskać dla siebie optymalną wypłatę, niezależącą od wyboru strategii przez przeciwnika. Wyliczmy najpierw wartość oczekiwaną wypłaty, na jaką może liczyć, gdy Gracz 2 użyje strategii A_2,

$$\mathbb{E}G_{A_2} = -2 \cdot p_{A_1} + 0 \cdot p_{B_1} = -2 \cdot p_{A_1}$$

oraz gdy użyje strategii B_2,

$$\mathbb{E}G_{B_2} = 3 \cdot p_{A_1} - p_{B_1}.$$

Aby wartość oczekiwana Gracza 1 nie zależała od wyboru strategii przez jego rywala, należy rozwiązać poniższy układ równań.

$$\begin{cases} \mathbb{E}G_{A_1} & = \mathbb{E}G_{B_1} \\ \quad p_{B_1} & = 1 - p_{A_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \cdot p_{A_1} & = 3 \cdot p_{A_1} - (1 - p_{A_1}) \\ \quad p_{B_1} & = 1 - p_{A_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{E}G_{A_1} & = \mathbb{E}G_{B_1} \\ \quad p_{B_1} & = 1 - p_{A_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 \cdot p_{A_1} & = 3 \cdot p_{A_1} - (1 - p_{A_1}) \\ \quad p_{B_1} & = 1 - p_{A_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot p_{A_1} & = 1 \\ \quad p_{B_1} & = 1 - p_{A_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{A_1} & = \frac{1}{6} \\ p_{B_1} & = 1 - p_{A_1} = \frac{5}{6} \end{cases}$$

Wyliczyliśmy, iż aby zapewnić sobie bezpieczną wygraną Gracz 1 powinien stosować strategię A_1 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$, a strategię B_1 z prawdopodobieństwem $\frac{5}{6}$. Przy takim podziale prawdopodobieństwa wartość oczekiwana jego wygranej przy obojętnej strategii Gracza 2 wynosi

$$\mathbb{E}G_{A_2} = \mathbb{E}G_{B_2} = -2 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Wyznaczając analogicznie strategię wyrównującą dla Gracza 2, otrzymamy:

$$\mathbb{E}G_{A_1} = p_{A_2} \cdot 2 + (1 - p_{A_2}) \cdot (-3) = 2p_{A_2} - 3 + 3p_{A_2} = 5p_{A_2} - 3$$
$$\mathbb{E}G_{B_1} = p_{A_2} \cdot 0 + (1 - p_{A_2}) \cdot 1 = 1 - p_{A_2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}G_{A_1} &= \mathbb{E}G_{B_1} \\ 5p_{A_2} - 3 &= 1 - p_{A_2} \\ p_{A_2} &= \frac{2}{3} \\ 1 - p_{A_2} = p_{B_2} &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Strategią wyrównującą dla Gracza 2 będzie więc użycie strategii A_2 z prawdopodobieństwem $\frac{2}{3}$ i użycie strategii B_2 z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Jego oczekiwana wypłata wynosi $\mathbb{E}G_{A_1} = \mathbb{E}G_{B_1} = 5 \cdot \frac{2}{3} - 3 = \frac{1}{3}$. Przypomnijmy, iż nadzieja matematyczna Gracza 1 wyniosła $-\frac{1}{3}$. Ponieważ jest to gra o sumie zerowej, wynik dla obu graczy jest przeciwstawny. Wynik jaki uzyskaliśmy jest odpowiednikiem punktu siodłowego w strategii czystej, gdyż, stosując swoje strategie z poszczególnym prawdopodobieństwem, Gracz 1 może zagwarantować sobie wygraną na poziomie co najmniej a, a Gracz 2 na poziomie co najmniej $-a$. Używanie przez nich strategii wyrównujących daje im optymalną wygraną bez większego ryzyka. Warto zaznaczyć, że dla gier, które mają punkt siodłowy, powyższa metoda nie zadziała.

Czytając o metodzie, która wybiera strategie za pomocą prawdopodobieństwa, natknęłam się na bardzo zabawne porównanie.

Problem polega jednak na tym, że podejmowanie istotnych decyzji za pomocą losowania może być dla społeczności metodą trudną do zaakceptowania – ale taki sam efekt osiągnie się, gdy szaman wskaże właściwy sposób postępowania na podstawie badania, na przykład, przypadkowych wzorów na kościach karibu, a odpowiednie reguły interpretacji wróżb optymalizują prawdopodobieństwa wybierania poszczególnych strategii[6].

Czyżby chodzenie do wróżki było metodą podejmowania decyzji za pomocą strategii mieszanej dla bardziej leniwych umysłów?

Podsumujmy dotychczasowo poznane metody.

1. *Dominacja strategii.* Jedna strategia dominuje (słabo dominuje) drugą strategię, jeśli gwarantuje w każdym przypadku lepszą (bądź taką samą) wygraną jak strategia zdominowana. Racjonalny gracz odrzuca strategie zdominowane.

[6] [1] s. 28

2. *Kryterium punktu siodłowego.* Racjonalni gracze wybierają strategie zawierające punkt siodłowy, gdyż w ten sposób maksymalizują swoje zyski, minimalizując straty. Do szukania punktu siodłowego można wykorzystać metodę z maksyminami. Gra może nie zawierać punktu siodłowego, bądź mieć ich kilka. Punkt siodłowy jest jednoznaczny co do wartości.

3. W przypadku braku punktu siodłowego, wyznaczanie *strategii mieszanej*. Metodę tę używamy, gdy gramy w grę więcej niż jeden raz. Polega ona na wyliczeniu prawdopodobieństwa, z jakim powinniśmy stosować dane strategie, aby zminimalizować straty.

Mając powyższe metody, popatrzmy na przykład ich zastosowania.

Dwie armie – armia 1 i armia 2 – walczą przeciwko sobie. Armia 1 broni swojej bazy przed atakiem rakietowym armii 2. Wiadomo, że armia 2 ma cztery rakiety, w tym dwie atrapy. Z kolei armia 1 ma tylko dwa pociski przeciwrakietowe. Pocisk antyrakietowy wystrzelony po i-tej rakiecie może zniszczyć i-tą rakietę albo i+1 rakietę. Niszczy tę rakietę, która jest prawdziwa. Armia 1 wygrywa, jeśli zdoła obronić się przed wszystkimi rakietami; armia 2 jeśli uda im się trafić we wrogą bazę chociaż raz. W jaki sposób armie powinny zaplanować swoje działanie, aby wygrać?

Oznaczenia:

- Niech A oznacza atrapy rakiet.
- Niech R oznacza prawdziwe rakiety.
- Strategie armii 1 oznaczać będziemy przez wyrażenie ij, gdzie $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $i \neq j$. Przez napis ij rozumiemy odpalenie pierwszego pocisku po ujrzeniu i-tej rakiety, a następnie wystrzelenie kolejnego pocisku po ujrzeniu j-tej rakiety armii 2.
- Strategie armii 2 oznaczać będziemy przez permutację 4-elementową multizbioru $\{A, A, R, R\}$.

Tabelka wypłat przedstawia się następująco:

Armia 2

Armia 1		RRAA	RARA	RAAR	ARRA	ARAR	AARR
	12	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(-1,1)
	13	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	14	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)
	23	(-1,1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)
	24	(-1,1)	(-1,1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)
	34	(-1,1)	(-1,1)	(-1,1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)

Odpowiednio wartość 1 i -1 oznacza wygraną lub przegraną. Uczyńmy następujące spostrzeżenia.

- Posługując się kryterium dominacji, można wykluczyć strategię 14 (jest zdominowana przez strategię 13), 24 i 34 (zdominowane przez strategię 23). Wynika to racjonalnej przyczyny – armii 1 nie opłaca się czekać, aż armia 2 wystrzeli czwartą rakietę, ponieważ w hipotetycznej sytuacji zniszczy tylko jedną rakietę, a nie dwie. Ze względu na założenie o racjonalności graczy tabelę wypłat można zredukować.

Armia 2

Armia 1		RRAA	RARA	RAAR	ARRA	ARAR	AARR
	12	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	(-1,1)
	13	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(-1,1)
	23	(-1,1)	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)

- Strategie *RARA*, *ARRA*, *ARAR* są zdominowane przez strategię *RAAR*. Ponownie redukujemy tabelkę.

Armia 2

Armia 1		RRAA	RAAR	AARR
	12	(1,-1)	(-1,1)	(-1,1)
	13	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)
	23	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)

- Ta gra nie ma punktów siodłowych.

Armia 2

Armia 1		RRAA	RAAR	AARR	min Armii 1
	12	(1,-1)	(-1,1)	(-1,1)	**(-1,1)**
	13	(-1,1)	(1,-1)	(-1,1)	**(-1,1)**
	23	(-1,1)	(-1,1)	(1,-1)	**(-1,1)**
	min Armii 2	**(1,-1)**	**(1,-1)**	**(1,-1)**	

Tabelki w takiej formie nie da się już bardziej zredukować. Widać w niej jednak pewną podpowiedź dla armii 2 – powinni wystrzelić kolejno 2 atrapy rakiet.

- Wobec trzeciej przesłanki poszukamy strategii mieszanej. Zauważmy, iż wartości w macierzy nad i pod przekątną są takie same. Wystarczy więc wyliczyć strategię wyrównującą dla jednej z armii, gdyż obliczenia dla drugiej będą takie same (zamiana miejscami wierszy i kolumny nie zmieni macierzy). Wyliczymy strategię wyrównującą dla armii 1.

Niech $\mathbb{E}A2_{RRAA}, \mathbb{E}A2_{RARA}, \mathbb{E}A2_{AARR}$ oznaczają wartości oczekiwane wypłat dla armii 1, przy użyciu strategii przez armię 2 ze zbioru $\{RRAA, RARA, AARR\}$, natomiast $p, q, 1-p-q$ odpowiednio prawdopodobieństwa użycia tych strategii.

$$\mathbb{E}A2_{RRAA} = p - q - (1-p-q) = p - q - 1 + p + q = 2p - 1$$
$$\mathbb{E}A2_{RARA} = -p + q - (1-p-q) = -p + q - 1 + p + q = 2q - 1$$
$$\mathbb{E}A2_{AARR} = -p - q + 1 - p - q = 1 - 2p - 2q$$

$$2p - 1 = 2q - 1 \iff p = q$$
$$1 - 4q = 2q - 1 \iff 2 = 6q \iff q = \frac{1}{3}$$

$$p = \frac{1}{3}$$
$$1 - p - q = \frac{1}{3}$$
$$\mathbb{E}A2 = -\frac{1}{3}$$

Zarówno armia 1, jak i armia 2 powinny korzystać ze swoich strategii z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$. Oczekiwana wypłata dla armii 1 wynosi $-\frac{1}{3}$, a ponieważ to gry o sumie zerowej, dla armii 2 nadzieja matematyczna wyniesie $\frac{1}{3}$. Jak widać, w tym wypadku łatwiej atakować, niż się bronić.

Powyżej przedstawiony model jest bardzo uproszczony. Rzeczywistość trudno jest modelować teorią gier. Trudno przewidzieć wszystkie zmienne, wszystkie scenariusze. Za pomocą teorii gier możemy tylko przybliżać pewne sytuacje oraz zdobywać o nich jakieś informacje. Jednak nie od dziś wiadomo, że rozum to potężne narzędzie, które mając za swój język matematykę, zbudowaną na logice, jest w stanie pokonywać coraz to nowsze bariery. Cóż więc pozostaje nam robić, jak nie rozszerzać wiedzę i szukać coraz to doskonalszych metod, aby modelować rzeczywistość? Takich metod m.in. w sytuacjach konfliktu dostarcza nam teoria gier. Pozwala ona na chłodną ocenę różnych strategii i pomaga wybrać, chociażby przez szacowanie prawdopodobieństwa, najlepsze rozwiązanie.

Magdalena Wnętrzak

[Literatura]

[1] Philip D. Straffin, *Teoria gier*, Wydawnictwo Naukowe „Scholar" Warszawa, 2001, ISBN 83-88495-49-6.

[2] Marek Szopa, *Teoria gier/Gry dwuosobowe suma zero* [online], Uniwersytet Śląski w Katowicach, Centrum Kształcenia na Odległość, [dostęp: 11 stycznia 2016 r.], dostępny w Internecie: `www.el.us.edu.pl/ekonofizyka/index.php/Teoria_gier/Gry_dwuosobowe_suma_zero`.

[X ŚWIĘTO LICZBY π — 15 marca 2016 r.]

w Instytucie Matematyki UŚ

HARMONOGRAM

9:00–14:00	Warsztaty KNM UŚ
10:00–10:45	*Słów kilka o dziwnych liczbach* – dr Łukasz Dawidowski
10:45–11:30	*Czy wszystkie liczby π są równe?* – mgr Szymon Draga
11:30–12:15	*Metoda Monte Carlo i podstępne korelacje* – mgr Joanna Zwierzyńska
12:15–13:00	*Dowody bez słów* – Mateusz Szymański
13:00–13:45	*O teorii mocy zbiorów* – Mateusz Kula
10:00–12:00	Pokazy i warsztaty Pałacu Młodzieży w Katowicach, s. 228 – mgr Dorota Kolany, mgr Justyna Bryś
14:10–15:10	Warsztaty: *Podstawowe znaki matematyczne w języku migowym*, dawna czytelnia
12:00–14:00	Konkurs *Mistrz Matematyki* – mgr Aurelia Tomaszewska Gimnazjum nr 21 w Katowicach
13:14–13:59	Konkurs *Bicie rekordu rozwinięcia liczby π*, s. 228
14:15–15:15	Rozdanie nagród

WARSZTATY KNM

s. 208:	*Zagadki logiczne 1* (9:00-14:00) – Michał Kolany, Krzysztof Gomółka
s. 209:	*Zagadki logiczne 2* – Grzegorz Heller, Kamil Zwierzyński, Karolina Spigiel
s. 211:	*Zagadki logiczne 3* – mgr Katarzyna Miś, Agnieszka Gawor, Aleksandra Krawiec
s. 216:	*Delfiny, nietoperze i roboty* (8:00, 9:00, 11:00, 12:00) – dr Jolanta Sobera
s. 224:	*Kawiarnia Szkocka* (9:00-14:00) – Martyna Biskup, Łukasz Rak, Kamila Broda, Wojciech Bury, Sebastian Haratyk, Adam Dobosz, Adrian Baziuk, Hanna Ćmiel
s. 225:	*Kasyno* (9:00-14:00) – mgr Roksana Brodnicka, Piotr Mikula, Michał Książek
s. 429:	*Szyfrowanie klasyczne* (10:00, 12:00, 14:00) – Magdalena Wnętrzak
s. 231:	*Fraktale* (9:00–14:00) – Krzysztof Granek, Michał Botor
s. 233:	*π-lionerzy* (9:00–14:00) – mgr Konrad Jałowiecki, mgr Paweł Bialas, Tomasz Kołodziej
s. 535:	*π-knik w π-landii – warsztaty dla najmłodszych* (10:00) – Marta Hernik, Monika Lamprecht, Małgorzata Gajda, Anna Kłosowska
s. 535:	*Przygoda w π-landii – warsztaty dla szkół podstawowych* (11:15, 12:15, 13:00, 14:00) – Monika Lamprecht, Marta Hernik

[Matematyka w Uniwersytecie Śląskim]

W rankingach na najlepszy zawód świata wygrywa... matematyk. Kolejne miejsca zajmują statystyk i aktuariusz - czyli tak naprawdę również matematycy. Ciekawa praca, wysokie zarobki, świetne perspektywy na przyszłość, stabilne zatrudnienie – między innymi tymi cechami kierują się twórcy rankingów. Może zatem warto rozważyć studia matematyczne?

Co można robić po matematyce? Większości osób praca po matematyce kojarzy się z pracą w szkole. Owszem, to jedna z opcji, ale absolutnie niejedyna. Matematyk może również pracować w banku (na przykład jako analityk ryzyka), może zajmować się programowaniem, może przeprowadzać badania kliniczne nowych leków, zajmować się statystyką, może też zostać na uczelni i prowadzić dalsze badania naukowe... Wymienienie wszystkich możliwych miejsc pracy nie jest możliwe. Jedno jest pewne: pracy po matematyce nie brakuje i jest to praca ciekawa i, co nie mniej ważne, dobrze płatna.

Zachęcamy do studiów matematycznych w Uniwersytecie Śląskim! Na studentów czeka kilka specjalności:

- matematyczne metody informatyki;
- matematyka w finansach i ekonomii;
- modelowanie matematyczne;
- nauczycielska – nauczanie matematyki i zajęć komputerowych;
- teoretyczna.

Nie wiesz, co wybrać? Nie martw się – większość z nas tak miała. Dlatego właśnie specjalność wybiera się dopiero po pierwszym semestrze studiów.

Więcej informacji znajdziesz na stronie internetowej Instytutu Matematyki UŚ `http://www.math.us.edu.pl/kandydat/index.html`. A jeśli masz jakiekolwiek pytania – napisz do nas! Możesz kontaktować się z pracownikami Instytutu Matematyki, ale możesz też po prostu napisać do nas, studentów, członków Koła Naukowego Matematyków UŚ. Czekamy pod adresem `knm@knm.katowice.pl` i na naszym profilu na facebooku: `www.fb.com/knm.katowice`. Zachęcamy do kontaktu!

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Kamila Broda, Szymon Draga, Mateusz Szymański, Magdalena Wnętrzak, Jan Zwierzyński
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan
Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p. 524) lub elektronicznie: `macierzator@knm.katowice.pl`.
marzec 2016