[MACIERZATOR65]

Gazetka redagowana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego

Witamy w sierpniowym numerze [MACIERZATORa]!

Tym razem opowiemy o coraz bardziej popularnym uczeniu maszynowym, pokażemy, co wspólnego z wyborem zajęć dodatkowych mają złożena Bandlera–Kohouta, a także przedstawimy kolejną porcję ciekawych zadań przesłanych do redakcji. Opowiemy też nieco o książce poświęconej pamięci Profesora Andrzeja Lasoty – jednego z nawybitniejszych uczonych naszej uczelni.

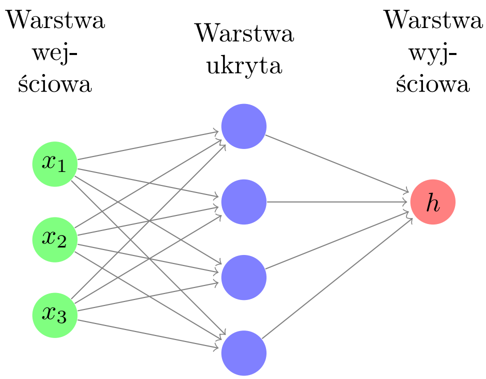
Ciekawej lektury życzy redakcja

[Kilka słów o sieciach neuronowych]

We współczesnym świecie technologii coraz więcej zastosowań ma tzw. uczenie maszynowe. Czym jest uczenie maszynowe? Jedna z popularnych definicji została zaproponowana przez Toma Mitchella w 1977 i brzmi następująco:

„Mówimy, że program komputerowy A uczy się na podstawie doświadczenia E względem pewnej klasy zadań T i wydajności P, jeśli jego wydajność wykonywania zadania T, względem miary P, poprawia się wraz ze wzrostem doświadczenia E".

W tym artykule chciałbym przybliżyć jedną z metod uczenia maszynowego, tzw. *sieci neuronowe*. Prostą sieć neuronową można przedstawić graficznie w następujący sposób:



Rysunek 1: Topografia sieci neuronowej

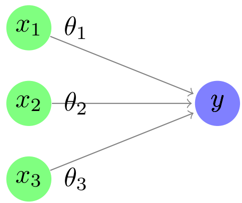
Jest to prosta sieć składająca się z trzech warstw:

1. warstwy wejściowej,
2. warstwy ukrytej,
3. warstwy wyjściowej,

reprezentowanych przez trzy „kolumny" neuronów (oznaczonych za pomocą okręgów). Każda sieć neuronowa zawiera dokładnie jedną warstwę wejściową oraz wyjściową, może natomiast zawierać wiele warstw ukrytych. Liczba neuronów w każdej warstwie jest dowolna.

Na sieć neuronową możemy patrzeć jak na funkcję, której argumentami są neurony warstwy wejściowej (x_1,x_2 i x_3), a wartością – wektor złożony z neuronów warstwy wyjściowej (w powyższym przypadku skalar h). Neurony w warstwach ukrytych reprezentują pewne pośrednie obliczenia.

Przyjrzyjmy się bliżej pojedynczemu neuronowi. W przypadku warstwy wejściowej reprezentuje on wartość pojedynczej cechy badanych obiektów. Natomiast wartości neuronów w kolejnych warstwach zależą od wartości neuronów w warstwach poprzednich. Każdej krawędzi skierowanej w sieci neuronowej przyporządkowany jest parametr (waga) reprezentujący wielkość wpływu wartości neuronów na początku krawędzi na neuron na jej końcu.



Rysunek 2: Neurony x_1, x_2, x_3 wpływają na neuron y z wagami odpowiednio θ_1, θ_2, θ_3.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}, \quad z = \theta^T x$$

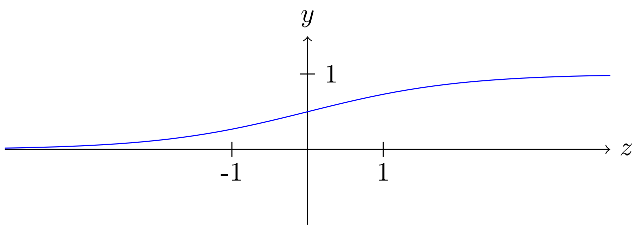
Wówczas wartość neuronu y obliczamy ze wzoru

$$y = g(z).$$

Funkcja g nazywana jest funkcją aktywacji neuronu. Jednym z przykładów takiej funkcji jest

$$g(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}},$$

której wykres wygląda następująco:

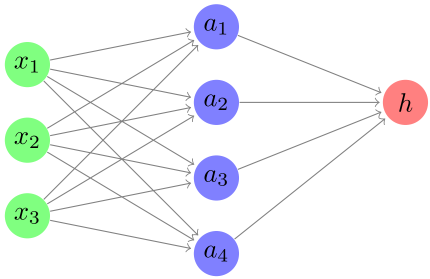


Jest to funkcja rosnąca, która przyjmuje wartości z przedziału $[0, 1]$ oraz szybko[1] zbiega do 1 (co oznacza aktywację neuronu), gdy $x \to \infty$, a do 0 (brak aktywacji), gdy $x \to -\infty$.

Dla neuronu y możemy więc napisać:

$$y = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}}.$$

Wróćmy do naszej pierwotnej sieci:



Wartości neuronów z warstwy wyjściowej będziemy nazywać wynikiem bądź predykcją sieci neuronowej dla argumentu $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ z warstwy wejściowej. W naszym przypadku w warstwie wyjściowej mamy jeden neuron, którego wartość dla argumentu $x = [x_1, x_2, x_3]^T$ oznaczmy $h_\theta(x)$ (θ oznacza zależność predykcji od wag wszystkich krawędzi w sieci). Wartości neuronów w sieci możemy obliczyć ze związków:

$$a_i = g(x_1\theta^1_{i1} + x_1\theta^1_{i2} + x_3\theta^1_{i3}), \quad i = 1, \ldots, 4$$
$$h_\theta(x) = h = g(a_1\theta^2_{11} + a_1\theta^2_{12} + a_3\theta^2_{13} + a_4\theta^2_{14})$$

W powyższej sieci będziemy stosować tylko jedną funkcję aktywacji (przedstawioną wcześniej), w związku z tym wartości a_1, a_2, a_3, a_4 oraz $h_\theta(x)$ będą wynosić w przybliżeniu 0 lub 1. Ponieważ predykcją będzie 0 lub 1, taka sieć pozwala rozwiązać problem klasyfikacyjny, np. wartości x_1, x_2, x_3 mogą odpowiadać wynikom matury kandydata na studia, a wartość predykcji – temu, czy dostanie się na studia $h = 1$, czy nie $h = 0$.

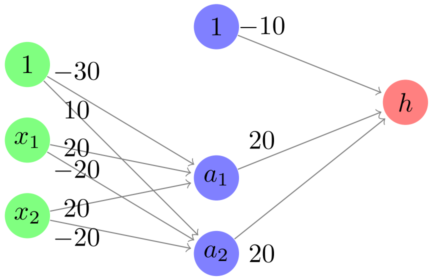
[1] „Szybko” to pojęcie względne, ale wartości $g(-2) \approx 0,12$ $g(2) \approx 0,88$ są dość zbliżone do zera i jedynki.

Poniższy przykład pokazuje zastosowanie sieci, której wagi θ już znamy.

Przykład 1 (Operator XNOR). Jest to dwuargumentowy operator logiczny, którego wyniki przedstawia poniższa tabela:

x_1	x_2	x_1 XNOR x_2
0	0	1
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Sieć neuronowa realizująca ten operator wygląda następująco:



Pojawiają się tutaj dwa neurony o stałej wartości 1, które dodają do sieci dodatkowe parametry niezależne od wartości danych wejściowych x_1, x_2. Obliczmy predykcję sieci dla $x_1 = 0$ oraz $x_2 = 1$.

$$\begin{aligned} a_1 &= g(1 \cdot -30 + x_1 \cdot 20 + x_2 \cdot 20) = g(-10 + 0 \cdot 20 + 1 \cdot 20) = \\ &= g(-10) = \frac{1}{1 + e^{-(-10)}} \approx 0 \\ a_2 &= g(1 \cdot 10 + x_1 \cdot -20 + x_2 \cdot -20) = g(10 + 0 \cdot -20 + 1 \cdot -20) = \\ &= g(-10) = \frac{1}{1 + e^{-(-10)}} \approx 0 \\ h &= g(1 \cdot -10 + a_1 \cdot 20 + a_2 \cdot 20) = g(-10) = \frac{1}{1 + e^{-(-10)}} \approx 0. \end{aligned}$$

Wynik jaki otrzymaliśmy z sieci neuronowej jest więc zgodny z naszymi oczekiwaniami.

Powyższy przykład pokazuje, jak za pomocą sieci przewidzieć wynik prostej operacji. Wiemy już zatem, jak korzystać z sieci neuronowej, gdy znamy jej parametry. Pytanie – skąd je wziąć? Tu z pomocą przychodzi proces uczenia[2] sieci neuronowej.

[2] [Uczenia, czyli znajdowania odpowiednich wartości parametrów θ

Do procesu uczenia potrzebujemy danych, dla których znamy już wynik, jaki powinniśmy otrzymać z sieci neuronowej dla danego problemu. Zobaczmy, na czym polega uczenie, na przykładzie kandydatów na studia. Załóżmy, że mamy wyniki matury z polskiego, angielskiego i oczywiście matematyki $m+k$ kandydatów na studia, wraz z informacją, czy dostali się oni na uczelnię, czy nie (taką klasyfikację możemy traktować jako zadaniem T z definicji Toma Mitchella). Pierwszych m rekordów wykorzystamy jako przykłady do uczenia sieci (czyli będą doświadczeniem E z definicji uczenia maszynowego), natomiast kolejnych k do oceny wydajności sieci, czyli oceny błędu predykcji dla ustalonej topografii sieci.

Rozpoczynamy od wyboru jakieś topografii (np. tej z Rysunku 1) oraz przyjęciu losowych wartości parametrów θ (w przypadku topografii z Rysunku 1 jest ich 16, ponieważ mamy 16 krawędzi). Teraz dla każdego kandydata możemy obliczyć predykcję sieci (odpowiedź będzie tym razem losowa) oraz porównać wyniki z rzeczywistymi danymi. Pozwoli to na obliczenie wielkości błędu predykcji sieci dla przyjętych parametrów za pomocą tzw. funkcji kosztu $J(\theta)$, zależnej od wag sieci. Koszt (wielkość) błędu dla pojedynczej predykcji dla i-tego kandydata oblicza się ze wzoru:

$$J(\theta) = -y^i \log h_\theta(x^i) - (1-y^i)\log(1-h_\theta(x^i)),$$

gdzie $y^i = 1$, gdy kandydat dostał się na studia lub $y^i = 0$, gdy miał mniej szczęścia. Przypominam, że y^i jest znane.

Zobaczmy, dlaczego taka miara błędu ma sens. W przypadku kandydata, który dostał się na studia, prawy składnik sumy jest równy zeru, a koszt wynosi $-\log(h_\theta(x^i))$. Jeżeli predykcji sieci jest bliska zeru, koszt jest bardzo duży, natomiast gdy jest bliska zeru, taki jest także koszt. Podobnie w przypadku kandydata, który na studia się nie dostał. Lewy składnik sumy jest równy zeru, a koszt wynosi $\log(1-h_\theta(x^i))$, zatem jest duży, gdy predykcja jest bliska jedynce oraz mały, gdy jest bliska zeru.

Błąd dla całego zbioru przykładów, czyli wszystkich kandydatów, oblicza się jako średni koszt przypadający na jeden przypadek, czyli

$$J(\theta) = -\frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{m} y^i \log h_\theta(x^i) + (1-y^i)\log(1-h_\theta(x^i))\right].$$

Teraz musimy znaleźć takie wartość parametrów θ, aby zminimalizować błąd predykcji, czyli wartość funkcji kosztu J. Osiąga się to metodą wstecznej propagacji błędu, której nie będę tutaj dokładnie opisywał (można ją znaleźć w Internecie pod hasłem *backpropagation algorithm*).

Po znalezieniu najbardziej optymalnych wartości parametrów θ, które oznaczymy przez $\theta_{(1)}$, obliczamy wartość kosztu dla k pozostałych rekordów.

$$J(\theta_{(1)}) = -\frac{1}{k}\left[\sum_{i=1}^{k} y^i \log h_\theta(x^i) + (1-y^i)\log(1-h_\theta(x^i))\right]$$

Wartość $J(\theta_{(1)})$ można traktować jako wartości odwrotności[3] wydajności P z definicji uczenia maszynowego sieci neuronowej o ustalonej topografii. Możemy teraz powtarzać proces uczenia dla innych topografii, obliczać kolejne wartości $J(\theta_{(2)})$, $J(\theta_{(3)})$,... i wybrać topografię, która zapewnia najmniejszy koszt (średni błąd predykcji).

Niniejszy artykuł zawiera jedynie podstawowe informacje dotyczące sieci neuronowych. W Internecie można znaleźć wiele materiałów na ten temat. Na stronie http://playground.tensorflow.org/ można bardzo łatwo zaprojektować sieć neuronową i zobaczyć, jak jej złożoność wpływa na szybkość uczenia czy dokładność wyników. Sieciach neuronowe są stale rozwijane oraz przystosowywane do rozwiązywania coraz bardziej złożonych problemów związanych choćby z rozpoznawaniem obiektów na zdjęciach (np. osób, budynków, samochodów czy zwierząt). Mają nawet pewien aspekt artystyczny; wystarczy wpisać frazę *google deep dream* w wyszukiwarce internetowej, aby zobaczyć fantastyczne zdjęcia, przerobione z nieklasycznym użyciem sieci neuronowych.

Adam Dobosz

[Złożenia Bandlera–Kohouta a wybór zajęć dodatkowych]

Analiza portfelowa i rynki kapitałowe, modele rynków finansowych z czasem dyskretnym, a może nieklasyczne metody statystyczne? Tyle różnych możliwości, a można wybrać tylko jeden moduł... Na który przedmiot specjalistyczny się zdecydować? Nie macie pojęcia? Spokojnie – z pomocą przychodzą Wam złożenia Bandlera–Kohouta. Dzięki nim wybór stanie się prostszy. Ale czym są owe złożenia?

Aby móc wprowadzić pojęcia złożeń Bandlera–Kohouta, potrzebujemy kilku innych, pomocniczych definicji.

Zacznijmy od wprowadzenia dwóch podstawowych definicji – zbioru następników i poprzedników elementu względem danej relacji.

Niech X, Y i Z będą dowolnymi niepustymi zbiorami oraz niech x, y i z będą takimi dowolnymi elementami, że $x \in X$, $y \in Y$ i $z \in Z$. Niech dalej

[3] Im większa wydajność tym lepiej, podobnie im mniejszy koszt tym lepiej.

$R \subseteq X \times Y$ oraz $S \subseteq Y \times Z$ będą relacjami określonymi odpowiednio na iloczynach kartezjańskich zbiorów X i Y oraz Y i Z.

Definicja 1. *Zbiorem następników elementu x względem relacji R* nazywamy taki podzbiór zbioru Y, że

$$xR = \{y \in Y : (x, y) \in R\}.$$

Definicja 2. *Zbiorem poprzedników elementu y względem relacji R* nazywamy taki podzbiór zbioru X, że

$$Ry = \{x \in X : (x, y) \in R\}.$$

Przypomnijmy klasyczną definicję złożenia dwóch relacji:

Definicja 3. *Złożeniem relacji $R \subseteq X \times Y$ i $S \subseteq Y \times Z$* nazywamy taką relację $R \circ S \subseteq X \times Z$, że

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z : \underset{y \in Y}{\exists} [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S]\}.$$

Zauważmy, że powyższy warunek możemy zapisać za pomocą definicji zbiorów poprzedników i następników elementu, mianowicie:

Twierdzenie 1. *Niech $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$. Wówczas:*

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z : xR \cap Sz \neq \emptyset\}. \tag{1}$$

Dowód. Niech

$$A = \{(x, z) \in X \times Z : \underset{y \in Y}{\exists} [(x, y) \in R \wedge (y, z) \in S]\}$$

oraz

$$B = \{(x, z) \in X \times Z : xR \cap Sz \neq \emptyset\}.$$

Pokażemy, że $A = B$.

$$\begin{aligned}
(x, z) \in A \quad &\Leftrightarrow \quad \underset{y \in Y}{\exists} [(x, y) \in R \ \wedge \ (y, z) \in S] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad \underset{y \in Y}{\exists} [y \in xR \ \wedge \ y \in Sz] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad xR \ \cap \ Sz \neq \emptyset \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \quad (x, z) \in B
\end{aligned}$$

$\square$

Mając dane powyższe definicje, możemy wprowadzić pojęcia złożeń Bandlera–Kohouta, czyli podzłożenia, nadzłożenia i złożenia kwadratowego relacji.

Definicja 4. *Podzłożeniem relacji R i S* nazywamy taką relację $R \triangleleft S \subseteq X \times Z$, że
$$R \triangleleft S = \{(x,z) \in X \times Z : \emptyset \neq xR \subseteq Sz\}.$$

Definicja 5. *Nadzłożeniem relacji R i S* nazywamy taką relację $R \triangleright S \subseteq X \times Z$, że
$$R \triangleright S = \{(x,z) \in X \times Z : \emptyset \neq Sz \subseteq xR\}.$$

Definicja 6. *Złożeniem kwadratowym relacji R i S* nazywamy taką relację $R \diamond S \subseteq X \times Z$, że
$$R \diamond S = \{(x,z) \in X \times Z : \emptyset \neq xR = Sz\}.$$

Uwaga. Bandler i Kohout w swoich rozważaniach dopuszczali możliwość, aby zbiory xR oraz Sz były zbiorami pustymi, jednakże, jak zauważyli w [1] De Baets i Kerre, warunek niepustości zbiorów xR czy Sz, występujący w powyższych definicjach jest ważny, gdyż gdyby tak nie było, to złożenia te mogłyby zawierać wiele niechcianych par.

Pewnie zastanawiacie się teraz, co te złożenia mają wspólnego z wyborem przedmiotu specjalistycznego. Aby rozwiać Wasze wątpliwości, prześledźmy poniższy przykład.

Przykład 1. Niech X, Y i Z będą odpowiednio zbiorami studentów, zainteresowań/tematów i dostępnych wykładów/przedmiotów, a $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ relacjami określonymi odpowiednio na iloczynie kartezjańskim zbiorów X i Y oraz Y i Z. Dla studenta $x \in X$ i tematu $y \in Y$ relację R określamy następująco: „Mówimy, że student x i temat y są w relacji R wtedy i tylko wtedy, gdy student x przejawia zainteresowanie tematem y" (relacja ta powstała jako wynik ankiety przeprowadzonej wśród studentów). Dla tematu $y \in Y$ i przedmiotu $z \in Z$ relację S określamy następująco: „Mówimy, że temat y i przedmiot z są w relacji S wtedy i tylko wtedy, gdy temat y jest poruszany na przedmiocie z" (relację tę tworzymy zgodnie z sylabusem).

Zauważmy, że odpowiednio złożeniem, podzłożeniem, nadzłożeniem i złożeniem kwadratowym tych relacji są:

1. $(x,z) \in R \circ S \Leftrightarrow \exists_{y \in Y}[(x,y) \in R \wedge (y,z) \in S]$, czyli istnieje zainteresowanie y, które przejawia student x i jest ono poruszane na przedmiocie z.
2. $(x,z) \in R \triangleleft S \Leftrightarrow \emptyset \neq xR \subseteq Sz$, czyli wszystkie zainteresowania y, które przejawia student x, są tylko niektórymi tematami y poruszanymi na wykładzie z.

3. $(x, z) \in R \triangleright S \Leftrightarrow \emptyset \neq Sz \subseteq xR$, czyli wszystkie tematy y poruszane na przedmiocie z są tylko niektórymi z zainteresowań y studenta x (problem uczestników kół naukowych).
4. $(x, z) \in R \diamond S \Leftrightarrow \emptyset \neq xR = Sz$, czyli wszystkie zainteresowania y studenta x są dokładnie takie jak tematy y poruszane na wykładzie z.

Możemy stąd wywnioskować, że wynik

1. **podzłożenia** z pewnością zainteresuje studenta, który chce poszerzyć swoją wiedzę i znaleźć na tym wykładzie wiele innych ciekawych tematów;
2. **nadzłożenia** zaciekawi studenta, który ma wiele zainteresowań (problem uczestników kół naukowych);
3. **złożenia kwadratowego** idealny będzie dla studenta, który przy minimalnym nakładzie pracy pragnie znaleźć odpowiedzi na wszystkie swoje pytania.

Jak widzimy, złożenia te jedynie pomagają przy wyborze przedmiotów. Zauważmy, że leniwego studenta zadowoli wynik złożenia kwadratowego, zaś studenta ambitnego wynik nadzłożenia. Najmniej miarodajnym wynikiem będzie wynik złożenia klasycznego.

Odnotujmy jeszcze, że jeżeli założymy, iż wyżej omawiane zbiory X i Y są zbiorami skończonymi, to relacje można przedstawić w postaci macierzy o elementach 0 i 1. Przedstawienie to umożliwia napisanaie aplikacji (np. okienkowej) wyznaczającej złożenia Bandlera–Kohouta.

Artykuł ten miał na celu wprowadzenie pojęć złożenia, podzłożenia, nadzłożenia i złożenia kwadratowego relacji. Jeżeli byłby ktoś bardziej zainteresowany tym temtem (bądź zobaczeniem jak działa aplikacja wyznaczająca te relacje), to zapraszam do kontaktu.

[Literatura]

[1] B. De Baets, E. Kerre, *Fuzzy relations and applications*, „Advances in Electronics and Electron Physics", vol. 89, Academic Press (1994), 267–274.

[2] H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2009, 10, 12, 15, 21, 195, 221, 232, 234.

[3] J. Sobera, *Mixed pseudo-associativities Bandler–Kohout compositions of relations*, „Kybernetika", Vol. 43 (2007), No. 2, 143–152.

Katarzyna Kłos

[Mathematics like Poetry. Andrzej Lasota 1932–2006]

Lubię wyszukiwać do [MACIERZATORa] ciekawe książki – tak nowości, jak i te, które na półkach stoją już od bardzo dawna. Tym razem przedstawiam Czytelnikom książkę szczególnie mi bliską, bo w której tworzeniu miałam zaszczyt i przyjemność mieć udział od początku do końca: książkę poświęconą pamięci Profesora Andrzeja Lasoty, matematyka światowego formatu, wykładowcy naszej uczelni, doktora honoris causa Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach.

Profesor Andrzej Lasota odszedł dziesięć lat temu, 28 grudnia 2016 roku. Jest jednak ciągle obecny duchem w naszym Instytucie, o co szczególnie dba dr hab. prof. UŚ Henryk Gacki, dla którego Profesor Andrzej Lasota był Mistrzem, ale też – Przyjacielem (Prof. Lasota był nawet świadkiem na jego ślubie!). Co roku w drugi piątek stycznia organizowany jest Wykład im. Profesora Andrzeja Lasoty. Wykłady wygłaszają najwybitniejsi matematyci z Polski i zagranicy – dość wspomnieć, że byli wśród nich tacy matematycy, jak Michael C. Mackey czy Tien-Yien Li.

Teraz, w dziesiątą rocznicę śmierci Profesora Andrzeja Lasoty, w ręce czytelników trafia poświęcona mu książka: *Mathematics like Poetry. Andrzej Lasota 1932–2006* (red. Henryk Gacki, współudział Joanna Zwierzyńska, Wydawnictwo Uniwersytetu Śląskiego, Katowice 2016). Znajdziemy w niej biografię Profesora, okraszoną wieloma zdjęciami, przedruki artykułów i wywiadów, a także – wspomnienia. Wspomnienia, które napisali ci, którym Profesor Andrzej Lasota był szczególnie bliski. A są wśród nich tacy matematycy, jak wymienieni wcześniej Michael C. Mackey, Tien-Yien Li, ale też James A. Yorke, Shui-Nee Chow i wielu, wielu innych...

Książka jest wyjątkowa także dlatego, że nie można jej kupić. Można ją tylko otrzymać. Dostali ją już uczestnicy Konferencji Zastosowań Matematyki w Zakopanem; otrzymają też uczestnicy jubileuszowego, X Wykładu im. Profesora Andrzeja Lasoty, który odbędzie się w styczniu 2016 roku. Na wykład zaproszeni są wszyscy zainteresowani – i gorąco do przyjścia zachęcam!

Więcej o książce: `http://wydawnictwo.us.edu.pl/node/12843`

Joanna Zwierzyńska

[Z listów do Redakcji]

W 62. numerze [MACIERZATORa] przedstawialiśmy Czytelnikom kilka ciekawych zadań, przygotowanych przez pasjonata matematyki – Michała Kremzera. Dziś też prezentujemy kilka interesujących zadań jego autorstwa. Szczególnie polecamy je studentom specjalności nauczycielskiej (warto wykorzystać je na kółku w szkole!) oraz zaglądającym do [MACIERZATORa] uczniom.

- **Przestawiony punkt**

  Na wykresie funkcji parzystej $f\colon R \to R$ przestawiono jeden punkt i otrzymano wykres funkcji nieparzystej. Scharakteryzować funkcję $f(x)$.

- **Stopień wielomianu**

  1) Stopień wielomianu $P(x)$ jest równy 5.
     Stopień wielomianu $P(x) - Q(x)$ jest równy 4.
     Co można powiedzieć o stopniu wielomianu $P(x) - 2Q(x)$?
  2) Wielomian $W(x)$ przyjmuje tylko wartości ujemne. Co można powiedzieć o stopniu tego wielomianu?
  3) Czy jest jakiś związek między parzystością wielomianu, a parzystością jego stopnia?
  4) Stopień wielomianu $P(x)$ jest równy stopniowi wielomianu $Q(x)$. Czy z tego wynika, że stopień wielomianu $x + P(x)$ jest równy stopniowi wielomianu $x + Q(x)$?

- **Układy równań z minimum i maksimum**

  1) Podać przykład liczb całkowitych a, b, c parami różnych i spełniających układ równań:

     1A)

$$\begin{cases} \min(a,b) + \min(a,c) + \min(b,c) = 100 \\ \max(a,b) + \max(a,c) + \max(b,c) = 102 \end{cases}$$

     1B)

$$\begin{cases} \min(a,b) + \min(a,c) + \min(b,c) = 100 \\ \max(a,b) + \max(a,c) + \max(b,c) = 1000000 \end{cases}$$

2) Wyznaczyć wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) spełniające układ równań:

$$\begin{cases} \min(a,b) + \max(a,b) = 2a + 3b \\ \min(a,b)\max(a,b) = (a+1)(b+1) \end{cases}$$

- **Układy z liczbami naturalnymi**

Czy poniższe układy równań mają rozwiązania w takich liczbach naturalnych dodatnich a, b, c, d, k, m, n, że każda z liczb a, b, c, d, k, m jest mniejsza od n?

1)

$$\begin{cases} 2kn = ab \\ dn = 2ac \\ mn = bc \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} k + n = 2a - b + 1 \\ d + n = 2b - c + 1 \\ m + n = 2c - a + 1 \end{cases}$$

[Rozwiązania]

- **Przestawiony punkt**

$$f(x) = \begin{cases} c \text{ dla } x = a \text{ lub } x = -a, \\ 0 \text{ dla pozostałych } x, \end{cases}$$

gdzie c oraz a są różne od 0.

- **Stopień wielomianu**

1) Jest równy 5.
2) Jest liczbą parzystą.
3) Wielomian będący funkcją parzystą jest stopnia parzystego. Wielomian niezerowy będący funkcją nieparzystą jest stopnia nieparzystego.
4) Nie, np. $P(x) = x$, $Q(x) = -x + 1$

- **Układy równań z minimum i maksimum**

1A) Nie ma takich liczb. Wskazówka: Jeżeli liczby całkowite x i y są różne, to $\max(x, y)$ jest liczbą większą lub równą $\min(x, y) + 1$.

1B) $a = 20$, $b = 60$, $c = 499970$.

2) Jedynym rozwiązaniem układu jest para $(-2, 1)$. Wskazówka: Dla dowolnych liczb a i b zachodzą równości

$$\min(a, b) + \max(a, b) = a + b$$

oraz

$$\min(a, b) \max(a, b) = ab$$

- **Układy z liczbami naturalnymi**

1) Tak, np. $a = 9$, $b = 4$, $c = 9$, $d = 9$, $k = 1$, $m = 2$, $n = 18$.
2) Nie. Dodając równania stronami, otrzymamy:

$$k + d + m + 3n = a + b + c + 3$$

– sprzeczność z warunkami zadania.

A na zakończenie – do rozważenia:

[Suma promieni równa wysokości]

W książce Pana Witolda Stachnika „Zbiór zadań z matematyki na ocenę celującą" (Wydawnictwo Szkolne Omega, Kraków 2003) na stronie 40 jest (wraz z rozwiązaniem) takie oto zadanie:

Z wierzchołka C kąta prostego w trójkącie prostokątnym ABC poprowadzono wysokość CD. Udowodnić, że długość wysokości CD jest równa sumie długości promieni okręgów wpisanych w trójkąt ABC, trójkąt ADC i trójkąt BDC.

Sformułuję i udowodnię twierdzenie odwrotne.

Jeżeli w trójkącie ABC długość wysokości CD (punkt D należy do odcinka AB) jest równa sumie długości promieni okręgów wpisanych w trójkąt ABC, trójkąt ADC i trójkąt BDC, to kąt ACB jest prosty.

Dowód. Skorzystam ze znanego (i względnie prostego do udowodnienia) wzoru z geometrii trójkąta:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{r}{(p-a)},$$

gdzie bok a leży naprzeciw kąta A, p jest połową obwodu trójkąta.

Stosując ten wzór do trójkątów ABC, ADC, BDC, otrzymuję

$$
\begin{aligned}
2r(1) &= (AC + BC - AD - BD)\,\mathrm{tg}\left(\frac{C}{2}\right)\\
2r(2) &= AD + CD - AC\\
2r(3) &= BD + CD - BC
\end{aligned}
$$

gdzie $r(1), r(2), r(3)$ oznaczają długości promieni okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty ABC, ADC, BDC.

Dodając te trzy równania stronami, otrzymuję

$$2(r(1) + r(2) + r(3)) = 2CD + (AC + BC - AD - BD)\left(\mathrm{tg}\left(\frac{C}{2}\right) - 1\right).$$

Ponieważ $AC+BC > AB = AD+BD$, z równości $r(1)+r(2)+r(3) = CD$ otrzymuję, że $\mathrm{tg}\left(\frac{C}{2}\right) = 1$, czyli kąt ACB jest prosty. $\square$

Panu Michałowi Kremzerowi bardzo dziękujemy za nadesłanie ciekawych zadań!

[Redakcja [MACI$_{\text{E}}$RZATORa] zaprasza do współpracy!]

[MACI$_{\text{E}}$RZATOR] to gazetka wydawana przez Koło Naukowe Matematyków Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach. Piszemy o tym, co nas ciekawi, zastanawia. To miejsce, w którym można opublikować pierwsze pomysły matematyczne, recenzje, eseje. Piszemy o różnych rzeczach:

- przedstawiamy nasze pierwsze drobne matematyczne pomysły;
- opisujemy szczególnie ciekawe naszym zdaniem zagadnienia matematyczne;
- przedstawiamy wyjątkowe zadania z matematycznych konkursów i olimpiad;
- recenzujemy popularnonaukowe książki z matematyki;
- przypominamy postaci słynnych matematyków;
- ... i nie tylko.

Wpadłeś na ciekawy matematyczny pomysł i chcesz podzielić się nim ze światem? Przeczytałeś coś interesującego? A może masz jeszcze inny pomysł na artykuł? Napisz do [MACI$_{\text{E}}$RZATORa]! Wpadnij do pokoju 524 w IM UŚ, aby omówić szczegóły, albo do nas napisz (np. na adres `knm@knm.katowice.pl`). Zapraszamy!

[Koło Naukowe Matematyków UŚ zaprasza]

Chcesz porozmawiać o czymś ciekawym? Zainteresował Cię jakiś matematyczny problem? A może po prostu masz ochotę z kimś porozmawiać? Koło Naukowe Matematyków serdecznie zaprasza wszystkich studentów! Działalność KNM zależy głównie od zainteresowań członków. Organizujemy:

- wyjazdowe konferencje naukowe w Szczyrku – najbliższa już niebawem!;
- międzynarodową konferencją International Students' Conference on Analysis;
- spotkania referatowe;
- marcowe Święto Liczby π;
- wieczory filmowe i wieczory gier...

...a także po prostu spotykamy się w pokoju 524 w Instytucie Matematyki UŚ. Nieważne, jaką masz średnią (nikt Cię o to nie zapyta) – każdy jest mile widziany. Jeśli masz ochotę, możesz coś zaproponować, i wspólnie to zorganizujemy. Możesz opowiedzieć o czymś ciekawym, włączyć się w organizację tego, co zaplanowane, albo po prostu z nami posiedzieć. Informacje o oficjalnych spotkaniach KNM pojawiają się na stronie `www.knm.katowice.pl` oraz na kołowym profilu na facebooku: `www.facebook.com/knm.katowice`. Jeśli jednak wolisz przyjść nieoficjalnie (a do tego szczególnie zachęcamy!), to po prostu zajrzyj kiedyś do pokoju 524. Każdy jest u nas mile widziany. Zapraszamy!

[Stopka redakcyjna]

Redaktor naczelna: Joanna Zwierzyńska
Autorzy artykułów: Adam Dobosz, Katarzyna Kłos, Michał Kremzer
Skład i łamanie w LaTeX: Beata Łojan

Kontakt z redakcją bezpośrednio w pokoju KNM (p.524) lub elektronicznie:

`macierzator@knm.katowice.pl`.

Wszystkie archiwalne numery [Macierzatora] dostępne są również w wydaniu elektronicznym na stronie internetowej KNM UŚ: `www.knm.katowice.pl`.
Wydanie elektroniczne [Macierzatora] posiada numer ISSN: 2083-9774.

sierpień 2016